BOLETIM

DO

INSTITUTO BRASILEIRO DE ATUÁRIA

Setembro, 1949

368,05
B823 b

RIO DE JANEIRO
BRASIL

Setembro de 1949

Índice

OBSERVAÇÃO

O Instituto não é responsável pelas opiniões emitidas pelo sócios em seus trabalhos submetidos à Assembléia Técnica, nem em discussões pelos mesmos suscitados.

BIBLIOTECA
DATA
264 26/5/61

NOTÍCIA

Mortalidade entre segurados brasileiros, de ERNESTO ORNSTEIN, M. I. B. A.

Sob o título acima foi apresentado a Assembléia Técnica de setembro de 1949 um trabalho de grande interêsse objetivo, no qual foram determinadas, com base em observações da mortalidade com segurados da Campanhia de Seguros de Vida "Previdência do Sul", taxas de mortalidade para os grupos segurados cujas apólices tinham menos de cinco anos e mais de cinco anos de idade.

A fim de evitar oscilações decorrentes do pequeno número de observações que possuia, o autor estabeleceu correções fundamentais baseado no andamento dos valores das tábuas de mortalidade *American Men (5)* e *Comissioners 1941 Standard Ordinary*, concluindo haver pequena divergência entre a mortalidade de segurados da referida Companhia e a das tábuas citadas.

O trabalho foi discutido em Assembléia Técnica de setembro de 1949, primeiramente pelo M. I. B. A. EDWARD OLIFIERS e em seguida pelo M. I. B. A. RIO NOGUEIRA que apresentou as seguintes observações, aprovadas pela Assembléia:

Rio Nogueira — "Desejo acentuar, em primeiro lugar, a grande importância prática da questão abordada pelo colega SR. ORNSTEIN; esta importância permite prever a discussão do trabalho em centros de pesquisa de outros paises, de modo que não posso deixar de julgar ainda muito restrita a análise feita pelo SR. OLIFIERS.

De fato, de sua exposição não nos veio um estudo crítico completo; certas observações feitas pelo DR. OSCAR PÔRTO CARREIRO a respeito da idéia central do autor me deixaram a impressão de ser mais prudente não divulgar ainda os resultados obtidos sem um novo debate mais prolongado".

Nestas condições, ficou assentado que o trabalho do SR. E. ORNSTEIN seria objeto de debate da Assembléia Técnica ordinária seguinte (setembro de 1950) afim de ser apreciado mais detalhadamente em vista do interêsse e repercussão internacional de suas conclusões.

HEREDITARIEDADE, MORTALIDADE E SEGURO DE VIDA

HERBERT J. FRIEDMANN, AIBA

As emprêsas privadas de seguro de vida selecionam os riscos propostos antes de assumir obrigações em caso de falecimento do segurado, afim de recusar a aceitação dos não seguráveis e avaliar os demais riscos com a maior precisão possível. Procuram assim constituir diversos grupos de seguros, que, segundo se admite, sofrerão apenas as modificações de composição previstas pelas bases estatísticas adotadas., mórmente em relação a mortalidade e invalidez de cada categoria. Os seguros, cuja mortalidade real, ao que se presume, não se afastará sensivelmente da frequência indicada pela tábua de mortalidade "padrão" escolhida, são denominados "normais". Os demais grupos, constituidos de riscos com mortalidade de freqüência relativa superior, em escala variável à normal, são resumidos sob o título de "riscos subnormais". Os princípios da técnica, *conforme são atualmente praticados*, não permitem a formação de um ou vários grupos compostos de riscos com mortalidade inferior à normal. Uma vez examinados os diversos fatôres dos quais depende a classificação de cada risco, determina-se o grau de extra-risco, se houver, em cada unidade de tempo compreendida na duração do seguro, estabelecendo a seguir de que fórma poderá ser aceito o compromisso, isto é, se mediante pagamento de prêmio normal em função da idade inicial verdadeira, contra pagamento de prêmio maior do que normal ou após convenção de condições especiais.

Os elementos apurados em relação às presentes condições físicas do proponente, ao seu histórico pessoal e ao histórico de família, são os principais fatôres utilizados na avaliação de riscos.

As observações de ordem clínica, feitas pelo médico no ato do exame de saúde, completadas eventualmente por provas de laboratório, raios X, etc., em sua totalidade resumindo as "atuais condições físicas", não constituem, portanto, o único material disponível para a classificação dos riscos. E' bem verdade que grande parte dos indivíduos inseguráveis são rejeitados devido às desfavoráveis condições presentes, verificando-se daí ser imprescindível, ao menos em compromissos de vulto, apurar o estado atual. Tais elementos, entretanto, nada esclarecem de per si a respeito de anomalias ou moléstias ainda latentes, ou sejam anomalias ou moléstias existentes, mas ainda não manifestadas, que, porém, de futuro se farão sentir, para, finalmente, decorrido maior ou menor prazo desde a seleção, em muitos casos, ocasionar a morte ou a invalidez.

Apezar de já haver sido investigada por muitos autores a influência de numerosas anomalias sôbre a mortalidade de segurados, a dificuldade de constituição de conjuntos homogêneos de observações estatísticas e a influência de fatôres extranhos, como são os de ordem social, econômica e comercial, ocasionaram profundas divergências entre os diversos resultados obtidos. Contudo encontram-se presentemente firmadas várias noções, entre as quais, mormemente uma, é de bastante importância para o nosso desenvolvimento: a probabilidade de falecer de determinada causa de morte é maior para um indivíduo em cujas atuais condições físicas, histórico pessoal ou histórico de família houver sido assinalada uma anomalia correlata à essa "causa-mortis", do que para uma pessôa sem tal classificação. Não importa, portanto, em princípio, se a anomalia já se manifestou no próprio indivíduo de fórma subjetiva ou constatada pelo examinador (atuais condições fisicas), se consta do passado mórbido do proponente (histórico pessoal) ou se figura como determinante do falecimento de um ou vários ascendentes ou irmãos do candidato (histórico de família). Parece, em geral, existir apenas uma diferença gradual entre essas três hipóteses: no primeiro caso costuma-se observar o maior excesso de mortalidade real sôbre a normalmente prevista e no terceiro o menor, ocupando o segundo uma posição intermediária. Em outras palavras: se, por esemplo, um proponente declarar que um dos seus pais faleceu em virtude de uma molestia nervosa, sem, porém, qualquer anomalia haver-se manifestado nele próprio, no passado ou no presente, nem haver algo de anormal quanto ao sistema nervoso sido observado pelo examinador, a sua probabilidade de falecer de molestia nervosa parece ser pouco superior à de um indivíduo que não acusa semelhante histórico de família. Tal probabilidade alcança, entretanto, valor numérico superior, se o candidato houver sofrido de anomalia ou moléstia nervosa antes de propor o seguro; e atinge uma ordem de importância tão elevada, que, geralmente, se torna impraticável conceder cobertura ao risco, se forem constatadas anomalias de natureza nervosa nas atuais condições.

Os métodos mais comumente empregados no estudo dos riscos subnormais são a comparação da mortalidade real com a prevista pela tábua de mortalidade de riscos normais e a construção

de tábuas especiais referentes a diversas classes de riscos caracterizados por cada uma das anomalias observadas com maior freqüência, sejam de condições atuais, de histórico pessoal, de histórico de família ou de um dos fatôres de influência menos generalizada.

Do primeiro processo concluem-se comumente dois tipos de resultados:

a) O quociente aproximadamente constante da taxa de mortalidade real sôbre a prevista em cada ano de idade ou de vigência do seguro;

b) O próprio excesso de mortalidade mais ou menos constante durante cada unidade de tempo consecutiva à seleção.

Na primeira hipótese os resultados têm a feição:

$$q'_x = (1 + \alpha) \times q_x \qquad (1)$$

onde q'_x representa a taxa de mortalidade dos riscos subnormais, α uma constante e q_x a taxa de mortalidade de riscos normais.

Na segunda hipótese os resultados obedecem à estrutura:

$$q'_x = \beta + q_x \qquad (2)$$

onde o símbolo β corresponde à parcela constante de extrarisco.

Baseado na equação (1) e nas conclusões obtidas em diversas investigações, o atuário Hunter estabeleceu o seu "Método somatório de avaliação de riscos". Segundo o autor, a influência em conjunto de vários fatôres, sem correlação entre si, sôbre a mortalidade, corresponde à soma das influências exercidas individualmente por cada um dos diversos fatôres. Uma vez, pois, verificado que i anomalias, independentes entre si, provocam excessos de mortalidade tais, que

$${}_1q'_x = (1 + \alpha_1) \times q_x \qquad {}_2q'x = (1 + \alpha_2) \times q_x$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad {}_iq'x = (1 + \alpha i) \times q_x$$

então

$$q'_x = (1 + \alpha) \times q_x$$

onde

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_i$$

Tomando-se como base uma tábua de mortalidade ajustada pela fórmula de Makeham, a existência de uma fator constante α entre q'_x e q_x leva a uma alteração do valor de s de Makeham, mas não provoca modificação de g ou c. A validade da igualdade (2) nada mais é senão a introdução de mais uma constante na fórmula de Makeham. Sendo de natureza mais complexa a relação entre a mortalidade real e a normalmente prevista, expressas em medidas adequadas, preferiu-se, no passado, determinar constantes de Makeham especiais ou até ajustar as tábuas de riscos sub-normais. por processos diferentes, conforme é preconizado pela escola escandinava.

As investigações que, no passado, tiveram como finalidade esclarecer aproximadamente e para exclusiva aplicação prática, com validade restrita às operações de determinadas emprêsas de seguro de vida, a influência sôbre a mortalidade de algumas anomalias assinaladas nas condições físicas atuais e no histórico pessoal dos candidatos foram, ao nosso ver, mais felizes do que os demais estudos que tiveram como objeto o histórico de família *ou dos quais se esperava obter conclusões teóricas de carater geral.* Quer nos parecer, no entanto, que, da utilização sistemática dos conhecimentos modernos a respeito da hereditariedade, poderá surgir um desenvolvimento substancial da técnica de seguro de vida.

Ha quase cem anos o padre Gregor Mendel, na então Bohêmia, após efetuar inúmeras experiências com cruzamento de plantas, finalmente descobriu a lei fundamental que rege a freqüência de manifestação e distribuição de qualidades hereditárias, ou seja de qualidades transmissíveis de uma geração para a seguinte. Pouco divulgados os trabalhos de Mendel na sua época, caíram logo a seguir no mais completo esquecimento, para apenas muito mais tarde se tornarem de domínio geral.

Novas investigações realizadas nos últimos decênios não sòmente confirmaram a exatidão das conclusões de Gregor Mendel, como também autorizam a admitir-se a validade das leis de hereditariedade em todos os setores da natureza viva, incluindo a espécie humana. Entre os mais destacados descobridores neste terreno cabe mencionar o Prof. Morgan nos Estados Unidos e o "team" composto de três sábios, Baur, Fischer e Lenz, na Alemanha. Aquele ocupou-se de preferência com cruzamentos de animais (principalmente moscas), enquanto os últimos procuraram em primeiro lugar esclarecer a hereditariedade na espécie humana.

A denominação "hereditária" é, neste trabalho, empregada para uma qualidade, quando a mesma é observada com freqüência elevada em número restricto de famílias, enquanto sòmente ocorre raramente nas numerosas outras famílias de um universo. E' de

notar, logo de início, expressamente, que uma qualidade hereditária apezar de transmitida por pai e mãi aos filhos, não terá sempre e forçosamente de manifestar-se em todos êsses descendentes.

A hereditariedade é localizada no "idioplasma", composto de diversos "cromosomos", cada qual, por sua vez, formado por varios "genes". Essa estrutura lembra, aliás, a divisão física de um corpo em moléculas e átomos. Segundo decorre de recentes trabalhos biológicos, apenas metade da substância hereditária do pai, no tocante a cada qualidade, pode ser transmitida para cada filho. A restante metade do quadro hereditário do descedente imediato provém de metade da substância hereditária da mãi. Em virtude da independência de associação de qualquer uma das duas metades de substância hereditária paterna, sem interferência da segunda, com uma ou outra metade da substância materna relativa a mesma qualidade, sem consequência sôbre a restante, a formação do quadro hereditário do filho está sujeito ao acaso nos têrmos da teoria de probabilidade.

Seja "a" o símbolo para metade da substância hereditária paterna no tocante a determinada qualidade, por exemplo, a côr castanha dos olhos, e "b" o símbolo materno correspondente, por exemplo, a olhos de côr azul.

Na primeira dedução seguinte admitir-se-á *um individuo pai* com quadro integral do tipo $(a + a)$ e um individuo mãe $(b + b)$. Ao prever a côr dos olhos relativos aos descendentes imediatos, deve-se levar em conta que cada "a" do binômio simbolizando o quadro hereditário paterno poderá associar-se com cada "b" represemtativo de metade da substância hereditária materna (côr dos olhos). A transmissão da qualidade examinada lembra pois a operação matemática.

$$(a + a) \times (b + b) = ab + ab + ab + ab \tag{3}$$

Resulta portanto que todos os filhos apresentam igual quadro hereditário "ab", ou seja metade proveniente de cada um dos ascendentes imediatos, sendo também igual para todos a côr dos olhos. No exemplo citado serão castanhos, uma vez que "hereditariedade de olhos castanhos domina sôbre a de olhos de côr azul". Em outras palavras: existindo simultaneamente as substâncias "a" e "b", apenas "a" se manifesta.

No intúito de acompanhar o desenvolvimento na geração seguinte, admitir-se-á que um dos indivíduos "ab" tenha filhos com cônjuge de igual quadro hereditário. Substituimos "ab" constante de (3) por $(a + b)$, o que é permissível por se tratar de símbolos representando associação biológica e não operações matemáticas. Em analogia ao esquema acima a transmissão terá a configuração:

$$(a + b) \times (a + b) = aa + ab + ab + bb \qquad (3)$$

Em três quartas partes dos descendentes diretos de dois indivíduos "*ab*" aparece a qualidade dominante "*a*", seja conjugada com o mesmo "*a*" ou com "*b*". Todos os filhos na proporção de 75% do total terão, consequentemente, olhos castanhos. Uma quarta parte dos descedentes, porém, com o quadro hereditário "*bb*" surpreenderá com os seus olhos de côr azul, ou seja com olhos de côr diferente da de ambos os pais. Não mais dominada pela associação com substância "*a*", a hereditariedade "recessiva" de olhos de côr azul manifestou-se em 1/4 dos descendentes na geração seguinte. E', pois imortal o quadro hereditário, visto que, além de evidenciar-se no seu aspeto dominante entre os filhos, netos, etc., a fórma recessiva pode apenas temporariamente ser encoberta, para mais tarde ou mais cedo, manifestar-se. Foi essa a descoberta de Gregor Mendel.

É interessante observar uma certa semelhança entre o fenômeno biológico, conforme descrito, e o desenvolvimento binomial. Cabe frizar que, apenas devido ao abuso de algumas liberdades matemáticas, foi-nos possível construir o paralelo, sem que, naturalmente, pretendessemos afirmar a existência de uma verdadeira igualdade formal.

A hereditariedade segundo a lei de Mendel, hoje também é conhecida sob a denominação de "combinação". Sabe-se que constitue a forma básica de transmissão de qualidades de uma geração para a imediatamente seguinte. Contudo, ainda é conhecido que alterações químicas do idioplasma (por exemplo, provocadas por alcool) e outras são responsáveis por uma segunda espécie de herediariedade denominada "mutação". Quanto à existência de *outras fórmas não consta* ainda doutrina suficientemente firmada para que possamos mencioná-la no presente trabalho.

Não ha por enquanto nenhum meio para definir, descrever sumariamente ou limitar quais as qualidades, humanas ou de outra espécie, que são hereditarias e quais não. No passado as investigações realizadas tiveram por objeto diversas qualidades isoladas, que pareciam suspeitas quanto a sua hereditariedade.

Muitas qualidades humanas carecem de interêsse em relação ao seguro de vida, de maneira que o estudo da fórma de hereditariedade ocupará apenas o biólogo. Mesmo entre as anomalias humanas hereditárias uma apreciável parte evidentemente nada

tem a ver com a frequência relativa de falecimentos. As restantes, porém, são qualitativamente de importância tal, que nos parece valer bem o esforço de conhecer-se com precisão a sua influência sôbre a mortalidade. Uma vez calculado numericamente o risco de manifestar-se determinada anomalia constante do histórico de família de certo individuo, ausente, porém, em seu histórico pessoal e nas suas condições fisicas na época da seleção, e conhecido o correspondente extra-risco de falecimento ou invalidez, o segurador estabelecerá a lógica distinção *entre* êsse grupo de seguros e *os* demais. E' de supôr que a previsão quanto à mortalidade dos riscos normais se torne mais otimista, amedida que fôr possível eliminar do seu meio riscos que apresentam as condições acima referidas. Talvez mesmo o progresso nesse terreno permita, de futuro, constituir categorias de seguros com mortalidade prevista inferior a normal, ou seja a atual média, fixando-se condições especiais para tal carteira.

Entre as anomalias ou molestias de interêsse para a técnica do seguro de vida, observadas com extraordinária frequência em limitado número de famílias ou com forma de hereditariedade já investigada e esclarecida, destacamos a esquizofrenia, epilepsia, algumas formas de tumores malignos, cálculos da vesícula, anemia perniciosa, diabetes, nefrite, hipertiroidismo, obesidade extrema, certas formas de endocardite e de outros disturbios do aparelho circulatório, disposição constitucional indefesa contra moléstias infecciosas, principalmente tuberculose pulmonar, e atrofia do nervo ótico não provocada por infecções (risco de invalidez).

Os cientistas no passado estudaram a hereditariedade colhendo elementos para investigação nas clínicas universitárias, particulares e em outras instituições semelhantes. Os resultados encontrados provêm de observações feitas por médicos em doentes e de declarações dos próprios pacientes, quanto aos seus ascendentes, irmãos e descendentes. Foram desta maneira estabelecidas árvores genealógicas, que muitas vezes permitiram conclusões claras e definitivas. Se êsse método não forneceu todos os resultados desejados e deixou de esclarecer a forma de hereditariedade de várias qualidades, atribuimos o insucesso parcial a diversas causas:

1 — Não se levou em conta o fator *tempo* ao confrontar a frequência real de qualidades observadas em uma determinada geração com a frequência teórica esperada segunda a lei de Mendel. Além das qualidades e anomalias humanas hereditárias manifestas desde o nascimento (como, por exemplo, a côr dos olhos), outras se tornam evidentes apenas no decorrer da vida (como a maioria das moléstias nervosas); algumas com tendência

a manifestar-se na juventude, outras em idade avançada. Um falecimento prematuro, motivado por causa independente da anomalia estudada, como, por exemplo, muitas vezes, por um acidente, impede qualquer conclusão, seja de manifestação, seja de não manifestação da qualidade hereditária no indivíduo em questão. Parece-nos que o conceito de "exposição ao risco" não foi até hoje observado com suficiente rigor em trabalhos biológicos referentes a hereditariedade.

2 — Não pode ser atribuido igual valor às observações feitas por médicos ao examinarem os próprios pacientes e às declarações de leigos quanto ao histórico mórbido de seus parentes. A equiparação dêsses dados deve haver sido a causa de muitas incorreções no passado.

3 — A ausência do emprêgo de processos estatísticos aperfeiçoados, como, por exemplo, de ajustamento dos resultados brutos, pode ser responsabilisada por outras tantas conclusões inexatas.

A aplicação sistemática e prática no seguro de vida depende de um conhecimento prévio e preciso da fórma de hereditariedade de uma série de anomalias humanas, que se manifestam aumentando finalmente as taxas anuais de mortalidade e, eventualmente, de algumas qualidades adicionais, que se fazem sentir em direção oposta, abrangendo senão todas ao menos grande parte das causas de morte mais freqüentes e correlatas. Nem as mais adeantadas emprêsas, na Europa ou na América do Norte, dispõem atualmente de tal auxílio à técnica do seguro de vida.

Talvez não exista, entretanto, um material estatístico mais adequado para investigação dos problemas nesse terreno, do que o conjunto de elementos em poder das companhias de seguro de vida e de outras instituições de previdência. Compõe-se êsse material de elevada quantidade de exames médicos de indivíduos pertencentes a uma ou várias gerações, contendo valiosas indicações a respeito da frequência de manifestação das diversas anomalias em diferentes idades, constatadas em provas de saúde, e da causa de morte para parte dos expostos ao risco. Uma investigação no sentido sugerido requer, preliminarmente, a colheita de informações que permitam agrupar os diversos componentes de uma árvore genealógica, ou ao menos de uma geração, a qual, tanto no cas de transmissão dominante como recessiva, fornece amplos esclarecimentos, levando-se naturalmente em consideração os prováveis desvios das frequências previstas.

Uma vez admitida a aplicação no seguro de vida das leis de hereditariedade, o conceito de "histórico de família" sofrerá a modificação necessária. Em lugar de atribuir-se apenas à causa de morte e à idade ao falecer dos ascendentes de duas gerações alguma influência sôbre a mortalidade dos segurados atuais, procurar-se-á compilar elementos mais detalhados quanto ao maior número possível dos parentes de primeiro grau, seja de gerações anteriores, presente ou seguintes.

No cálculo dos prêmios, das reservas matemáticas e de outros valores técnicos emprega-se, como medida de mortalidade, a taxa anual q_x, variável segundo a idade x. Por definição

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \tag{5}$$

onde

$$d_x = {}^1d_x + {}^2d_x + \ldots\ldots\ldots + {}^id_x \tag{5a}$$

e

$$l_x = {}_1l_x + {}_2l_x + \ldots\ldots\ldots + {}_il_x$$

sendo ${}^id_x$ o número de falecimentos provocados pela causa i e ${}_il_x$ o número de sobreviventes, também na idade x, com quadro hereditário i (apresentando correlação com a causa de morte (i).

De conformidade com o teorema inicial, a probabilidade de um indivíduo, portador do quadro hereditário i (latente ou manifesta), falecer da causa de morte correlata é superior à probabilidade de um indivíduo, com quadro hereditário diferente, falecer da mesma causa, ou seja em símbolos:

$${}^i_i q_x > {}^i_k q_x \tag{6}$$

onde

$${}^i_i q_x = \frac{{}^i_i d_x}{{}_il_x}.$$

e

$${}^i_k q_x = \frac{{}^i_k d_x}{{}_kl_x}$$

Na expressão (5a):

$$ {}_{i}d_x = {}^{i}_{i}d_x + \sum_{k \neq i} {}^{i}_{k}d_x $$

Portanto:

$$ d_x = \sum_{r} {}^{i}_{i}d_x + \sum \sum {}^{i}_{k}d_x $$

e

$$ q_x = \frac{\sum\limits_{i} {}^{i}_{i}d_x + \sum\limits_{i} \sum\limits_{k} {}^{i}_{k}d_x}{\sum\limits_{r} {}_{i}l_x} \tag{7} $$

A igualdade (7) indica que a taxa anual de mortalidade, nas condições admitidas, é uma medida sujeita à composição segundo o quadro hereditário dos sobreviventes em cada idade x. Um aumento da freqüência de ${}_{j}l_x$ com maior probabilidade de falecer da causa *"j"* determinará uma elevação de q_x, salvo se houver compensação proveniente de outra componente.

Definimos, porém,

$$ q_x = \left\{ {}^{1}_{1}q_x + {}^{1}_{2}q_x + \ldots + {}^{1}_{i}q_x + {}^{2}_{1}q_x + \ldots + {}^{2}_{i}q_x + \ldots \right. $$
$$ \left. \ldots + {}^{i}_{i}q_x \right\} \frac{1}{i} \tag{8} $$

onde ${}^{z}_{i}q_x$ representa a probabilidade de um individuo com quadro hereditário correlato a causa "i" falecer da causa de morte "z".

Derivando do teorema inicial admitimos que as probabilidades de dois indivíduos, com quadros correlatos a diferentes causas de morte "k" e "i", falecerem de uma causa independente de ambas acima, "z" sejam aproximadamente iguais, isto é:

$$ {}^{z}_{k}q_x \sim {}^{z}_{i}q_x \tag{9} $$

A equação (8) então tranforma-se em:

$$ q_x = \left\{ {}^{1}_{1}q_x + {}^{2}_{2}q_x + \ldots + {}^{i}_{2}q_x + \bar{q}_x \right\} \frac{1}{i} \tag{10} $$

onde

$$ \bar{q}_x = \sum \sum {}^{z}_{k}q_x \quad \text{para quaisquer valores de } z \neq k $$

Na hipótese mais simples de uma única anomalia hereditaria da-se:

$$ q'_x = {}^{i}_{i}q_x + \bar{q}_x \tag{11} $$

Desde que para todas as idades sejam validas as seguintes relações:

$$ {}^{i}_{i}q_x = \epsilon\, q_x \qquad \bar{q}_x \sim q_x \qquad (1 + \epsilon) = \alpha $$

ou

$$ \alpha = \frac{{}^{i}_{i}q_x + \bar{q}_x}{q_x} - 1 $$

onde ϵ é um constante, então prevalece a escala constante de excesso de mortalidade anormal sôbre a normal devido a anomalia "i", conforme consta da expressão (*1*). Unicamente um valor invariável, e consequentemente, também independente da idade x, daria margem para que fosse válida a expressão (*2*) com um excesso de risco constante em seu valor absoluto. Não há, por enquanto, como justificar a presunção de relações elementares, como as acima referidas, entre a mortalidade real de indivíduos com quadro hereditário anormal e a normalmente prevista, considerando-se como efetivas as leis de hereditariedade.

Sendo Φ_i a probabilidade de manifestar-se no decorrer da vida humana a anomalia "i" (valor numérico de 0,75 no segundo exemplo de transmissão dominante da qualidade "a"), ${}_{i}l_x$ o número de sobreviventes da idade x, expostos ao risco de manifestar-se a anomalia antes de atingirem a idade $x + 1$ e ${}^{i}_{i}p_x$ a probabilidade de manifestar-se a anomalia em um indivíduo entre as idades x e $x + 1$, vem:

$$ {}_{i}l_0 \times \Phi_i = {}_{i}l_0 \times {}^{i}_{i}p_0 + {}_{i}l_1 \times {}^{i}_{i}k_1 + \ldots $$

$$ \Phi_i = {}^{i}_{i}p_0 + \frac{{}_{i}l_1}{{}_{i}l_0} \times {}^{i}_{i}p_1 + \frac{{}_{i}l_2}{{}_{i}l_0} \times {}^{i}_{i}p_2 + \ldots $$

Substituindo:

$$\frac{{}_i l_x}{{}_i l_0} = {}_i p_0{}^{(x)}$$

obtem-se

$$\Phi_i = \sum_{x=0}^{\omega} {}_i p_0{}^{(x)} \times {}^{i}_{i} p_x \qquad (12)$$

Caberá à estatística elaborar valores de ${}_i p_0{}^{(x)}$ e ${}^{i}_{i} p_x$, que harmonizem com os Φ_i decorrentes das leis de hereditariedade.

RESUMO DA DISCUSSÃO

René Célestin Scholastique — Em muitas reuniões do tipo da presente, isto é, daquelas em que se discutam estudos técnicos, o debatedor procede, mais ou menos da seguinte maneira: depois de apresentar o autor da tese em foco, analisa e resume o trabalho para os que não têm o tempo de aprofundá-lo (... ou mesmo de passar uma vista nele). A seguir faz algumas críticas, para mostrar que examinou o assunto cuidadosamente, e, em compensação, tece os indispensáveis elogios ao ilustre colega autor. Vem depois uma conclusão sôbre a utilidade e as aplicações da obra examinada. Ia esquecendo um certo número de citações, algumas das quais feitas só para realçar a cultura do próprio debatedor. Assim se procede em nossas assembléias técnicas, com a particularidade, entretanto, de que os nossos debatedores são geralmente bastante modestos. Procurando imitar o que há de bom na linha de conduta acima esboçada, e evitar o que me parece mau, direi no caso atual, que o nosso colega, HERBERT FRIEDMANN, é especialmente bem qualificado para abordar a tese escolhida. Filho de médico e curioso de medicina, acrescenta aos seus conhecimentos técnicos uma longa prática da seleção de riscos e dos trabalhos de estatística numa grande Cia. de seguros.

Passo agora ao exame do trabalho:

O autor começa por analisar, para o seguro de vida, os elementos que intervêm na avaliação do risco: o principal é o conjunto das "atuais condições físicas"; depois frisa a importância do "histórico pessoal" e do "histórico de família", e diz que as consequências eventuais de ser pouco satisfatório um daqueles elementos são em geral da mesma natureza, existindo apenas uma diferença gradual entre essas consequências.

O nosso colega lembra depois que os métodos mais comumente empregados no estudo dos riscos subnormais têm sido a comparação entre a mortalidade real e a mortalidade prevista e, por outra parte, a construção de tábuas especiais referentes a diversas classes de riscos, caracterizados por certas anomalias observadas com maior frequência.

Do primeiro método surgem dois tipos de resultados: um dêles corresponde a um quociente aproximadamente constante entre a taxa de mortalidade real e a prevista em cada ano; o outro, a uma diferença constante entre as mesmas taxas.

O SR. HERBERT FRIEDMANN acha que os estudos sôbre condições físicas atuais e sôbre histórico pessoal dos candidatos têm sido, até agora, mais felizes que os relativos ao histórico de família, e pensa que a utilização sistemática dos conhecimentos modernos a respeito da hereditariedade pode conduzir a um desenvolvimento substancial da técnica do seguro de vida.

Depois de algumas alusões aos trabalhos de GREGOR MENDEL, do PROF. MORGAN dos EE. UU., e do grupo dos três sábios alemães BAUR, FISCHER e LENZ, o SR. FRIEDMANN dá uma definição interessante do têrmo "qualidade hereditária".

Vem a seguir um exemplo simples e interessante, ou seja, a transmissão da côr dos olhos. Mostra como a formação do quadro hereditário do filho está sujeito ao acaso nos têrmos da teoria da probabilidade" e também como o quadro hereditário é imortal, podendo apenas temporàriamente ser encoberta a forma "recessiva".

Seguem-se considerações sôbre as qualidades humanas que são hereditárias, e, entre essas sôbre as que apresentam um interêsse em relação ao seguro de vida. O autor acha que vale a pena fazer um esfôrço para conhecer com precisão a sua influência sôbre a mortalidade; cita diversas "anomalias ou moléstias observadas com extraordinária freqüência em limitado número de famílias ou em forma de hereditariedade já investigada e esclarecida".

O Sr. Friedmann examina, depois, os métodos já empregados no estudo da hereditariedade: observações feitas por médicos em doentes e declarações dos próprios pacientes, com o consecutivo estabelecimento de árvore genealógicas. Analisa as causas do pouco sucesso dêsses estudos, entre as quais assinala o fato de que "o conceito de exposição ao risco não foi até hoje observado com suficiente rigor".

Frisando que não existe, tálvez, "um material estatístico mais adequado para investigação dos problemas nesse terreno do que o conjunto de elementos em poder das companhias de seguro de vida e de cutras instituições de previdência", o autor do trabalho aborda o cálculo do q_x onde intervem a questão de hereditariedade.

Chega a uma expressão que é função dos diversos ${}^{z}_{i}q_x$, designando êste símbolo a "probabilidade de um indivíduo com quadro hereditário correlato à causa i falecer da causa de morte z". Da fórmula encontrada são deduzidas as hipóteses que devem ser realizadas para que se possa admitir um quociente constante ou uma diferença constante quando se comparam o q_x normal e o anormal.

O trabalho termina pelo cálculo da probabilidade Φ_i de se manifestar uma anomalia i no decorrer da vida humana. Φ_i é função de certas probabilidades a serem fixadas pela estatística e que deverão harmonizar-se com os Φ_i decorrentes das leis da hereditariedade.

O assunto escolhido pelo A. I. B. A. Friedmann é original e ainda pouco vulgarisado. A exposição é, em geral, clara e os têrmos empregados definidos com precisão. O autor teve o bom senso de não se lançar em longos cálculos, uma vez que os documentos de base não foram ainda suficientemente aproveitados e coordenados. O nosso colega me deu verbalmnete algumas explicações sôbre a última alínea da pág. 9, que não me parecia fácil de compreender.

De um modo geral acho que o trabalho poderá servir ulteriormente a encorajar as pesquisas no campo da hereditariedade.

Pode parecer um pouco ousado querer explorar êste campo; mas não existia a mesma impressão quando se tomaram muitas outras iniciativas, por exemplo, a respeito da influência do exame médico sôbre a mortalidade nos primeiros anos do seguro? Poterin du Motel parecia provavelmente bem teórico quando, em 1893, escreveu o seu estudo intitulado *Usage et ajustement des Tables de mortalité par ages à l'entrées.* Mais tarde Quiquet (em 1896), Risser (em 1920), Hochart (em 1922), para citar só alguns daquels que conheci pessoalmente, contribuiam pára desbravar o terreno naquela zona das pesquisas atuariais, e atualmente as "Tabelas por idades à entrada" são usadas para diversos trabalhos em certas companhias de seguro de vida. Podemos, pois, esperar que, no futuro, a idéia do Sr. Friedmann seja, como no caso citado. fértil em resultados práticos.

João Lyra Madeira — Achamos o trabalho original e particularmente interesarte, pois haviamos iniciado um estudo do mesmo tipo com orientação análoga.

Nós também nos demos a veleidade de estudar um pouco de genética, e achamos, como naturalmente todos os que se interessarem por êste assunto,

que se encontra aí muita matéria para se trazer ao campo do seguro, especialmente no que se refere à seleção médica.

Vamos aproveitar esta oportunidade para indicar em linhas gerais, alguma coisa que havia meditado sôbre o assunto; fazemos apenas como colaboração e provavelmente desistiremos de apresentar o nosso trabalho, porque considero-o pràticamente apresentado hoje. Naturalmente daqui para diante procuraremos desenvolvê-lo melhor, e também esperamos que o Sr. Friedmann estudará mais alguma coisa no sentido de aprofundar suas pesquisas.

Um primeiro aspecto a observar, é de caráter apenas formal. Refere-se à vantagem de se definir a *tara* em função, não da taxa de mortalidade, mas da taxa instantânea. Representar-se-ia assim a tara pela expressão da taxa instântânea de mortalidade *ux*

$$\mu_x^{(\alpha,\,\beta)} = \alpha\mu_x + \beta$$

quando na realidade, em geral, se toma um q'_x para riscos tarados definido por

$$q'_x = (1 + \alpha)\, q_x.$$

Em vez de operar sôbre os q_x há vantagem de caráter teórico e prático em se operar sôbre os μ_x. No primeiro caso a extra-mortalidade só depende de um parâmetro e no segundo a taxa instântanea é dependente de dois parâmetros α e β, sob forma linear, e teriamos nesse caso, para $\alpha = 1$, mais ou menos a tara constante que o Sr. Friedmann apresenta como sendo $q_x + \beta$.

Quando $\alpha > 1$, β sendo positivo, teremos a tara crescente, e se $\alpha < 1$, a tara decrescente.

A vantagem da fórmula que sugerimos se aprecia tendo em vista que a anuidade vitalícia sôbre várias cabeças pode ser expressa como sendo:

$$a_{x \cdots x\,(k)} = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (k\,\mu_\xi + \delta)\, d\xi}\, dt$$

Vê-se por aqui que $k\mu_\xi + \delta$ não é outra coisa senão a taxa instantânea relativa a um risco tarado

$$\mu_x^{(k,\,\delta)}$$

Se supuzermos $k = 2$, ou seja, um grupo de duas cabeças, as anuidades resultantes vêm a ser exatamente as anuidades para duas cabeças, quer dizer, um risco tarado de 100% de extra-mortalidade, terá tôdas as suas tarifas e seus elementos fundamentais determinados a partir dos referentes às tarifas de duas cabeças, se adotarmos a expressão dada para a taxa instantânea. Mas a vantagem principal é que podemos interpolar, aplicá-la para valores de k intermediários, de modo que resultam fórmulas muito simples para cálculo. Na hipótese, por exemplo de um seguro dotal, supondo-se o caso mais simples, $\beta = o$, resulta:

$$\mu_x^{(\alpha,\,o)} = \alpha\mu_x,$$

sendo êsse α o que está representado por $1 + \alpha$ na fórmula (1).

A fórmula aproximada do prêmio de um risco tarado, $\pi_x^{(\alpha,\,o)}$ será:

$$\pi_x^{(\alpha,\,o)} = \pi_x + \alpha \left[\frac{1}{a_{xx}} - \frac{1}{a_x} \right].$$

Assim o prêmio do risco tarado resulta em função exclusivamente das tarifas de riscos normais sôbre uma e duas cabeças, porque o têrmo:

$$\frac{1}{a_{xx}} - \frac{1}{a_x}$$

é evidentemente igual a:

$$\pi_{xx} - \pi_x$$

Essa é uma vantagem que realmente tem caráter prático. Temos notado que êsse critério permitir em geral a obtenção de tarifas suficientemente aproximadas para qualquer tara, sem a necessidade de se construirem tabelas por classes, como em geral é feito.

Um segundo aspecto a apreciar seria o que se refere à expressão (6) do trabalho do Sr. Friedmann

$$_{i}^{i}q_x > {}_{k}^{i}q_x \qquad (6)$$

que significa ser a probabilidade de morte de um indivíduo com uma "tara" i, por uma causa correlacionada com essa tara superior á probabilidade de morte de um indivíduo portador da "tara" $k \neq i$ por uma causa correlata com a tara i.

Acho que muito pouco se tem feito no sentido de medir essa desigualdade. Hoje, com o material de que se dispõe, é possível se estabelecer tais medidas, o que poderia ser conseguido a partir da medida da assoicação entre a tara declarada pelo médico e a *causa mortis*. Deveriamos portanto, determinar o coeficiente clássico de associação:

$$\delta_{AB} = \frac{(A\,B)}{N} - \frac{(A)}{N} \cdot \frac{(B)}{N}$$

onde A sera a "tara" e B a *causa mortis* com ela correlacionada.

Se resultasse

$$\delta_{AB} = 0,$$

não existiria associação entre (A) e (B); se δ_{AB} fosse maior que zero haveria associação positiva, e se menor que zero, negativa.

O valor zero como hipótese nula pode ser testado mediante os processos clássicos, por exemplo,, o teste χ^2.

Dessa forma poderiamos determinar êsses coeficientes para diversas "taras", verificadas nos exames médicos ou pelo menos aquelas taras que são realmente eficientes na agravação da mortalidade. Poderiamos encontrar que determinada tara, que em face do exame médico exige a cobrança de extra-prêmio, não seja eficiente no sentido de aumentar a taxa de mortalidade.

O 3.º aspecto a analisar é o da função $\varphi_i(o)$ muito interessante que o Sr. Friedmann introduziu.

Ele considera a função:

$$\varphi_i(o) = \sum_{x=o}^{\omega} {}_{i}p_o^{(x)} \cdot {}_{i}^{i}p_x \qquad (12)$$

com a probabilidade de se manifestar no decorrer da vida humana a anomalia i.

Não sei porque o autor só considera a idade zero, pois se poderia definí-la de forma mais geral, o que é interessante, segundo pensamos. De fato, quando a Companhia examina o candidato êle tem uma certa idade e interessa conhecer a probabilidade de que a anomalia se manifeste a partir dessa idade x e não da idade zero. Essa probabilidade seria análoga a definida pelo Sr. Friedmann:

$$\varphi_i(x_1) = \sum_{x=x_1}^{\omega} {}_{i}p_\alpha^{(t)} \cdot {}_{i}^{i}p_{\alpha+t}$$

Ainda o outro aspecto sôbre o qual desejamos fazer algumas considerações é o que se refere à aplicação dos conhecimentos sôbre genética ao desenvolvimento do seguro e à modificação do sistema de exames e de seleção.

De um modo geral, por circunstâncias inerentes ao homem, a complexidade do assunto é muito grande, pois como o autor salienta, todo o quadro hereditário está localizado em determinados corpos que são os cromosomas, compostos de gênes que são os únicos elementos, pelo menos por enquanto, da transmissão dos fatôres hereditários.

Existem três tipos fundamentais de cromosomas. Os cromosomas característicos do sexo, são os cromosomas X e Y. Na mulher há uma par de cromosomas X e no homem um X e um Y. Esse último, é pràticamente um cromosoma sem função ativa. É verdade que ultimamente se descobriram algumas funções para êle. Em muitos casos não existe. Finalmente, há outros cromosomas chamados autosomas.

A drosófila fêmea, por exemplo, possui apenas um par de cromosomas X e mais três pares dêsse autosomas; o macho possui um X e três pares de autosomas. Isso facilita muito porque o número de combinações é restrito; assim, em certos animais, é possível fazer-se uma experiência com uma linhagem pura, tendo-se a certeza que os indivíduos possuem determinadas caracerísticas iguais e só diferem por uma delas ou por algumas.

No homem, porém, em primeiro lugar não é possível fazer a experimentação, por não ser possível controlar os cruzamentos para a obtenção de linhagem pura; em segundo lugar o número de combinações é a que corresponderia a 24 pares. Tendo-se ainda em conta a circunstância de que os cromosomas não se combinam inteiramente, podendo haver relações parciais, isto é, uma cromosoma com uma série de grupos de gênes que se podem reunir parcialmente, verificamos que o número de combinações cresce infinitamente.

Em todo caso, por meio de análise sistemática de correlação, seria possível, senão obter exatamente o quadro hereditário, pelo menos estabelecer determinadas conclusões de correlação sôbre possíveis caracteres apresentados no histórico de família. Para isso o histórico de família deveria ser bem mais desenvolvido, e constituir informação da mais alta fidelidade.

Há determinadas características que talvez fossem de mais fácil estudo; são aquelas que se relacionam com o cromosoma X. Há uma série de características (inclusive de moléstias) que são relacionadas com êste cromosoma. Por exemplo, *hemofilia, daltonismo e uma série de outras enfermidades ou defeitos físicos* estão relacionados a êsse cromosoma.

Essas características relacionadas com o sexo são muito mais fáceis de serem acompanhadas porque, sendo em geral recessivas, elas, não aparecem nas mulheres senão com muito pouca probabilidade. Basta que haja um cromosoma normal para que a característica não apareça. Tendo a mulher dois cromosomas, é muito *pouco provável que os dois sejam atacados do mal; em geral um é e o outro não.* Este é o caso da hemofilia. A mulher não apresenta (senão em casos raríssimos) característica hemofílica. Aliás, convém observar que um dos cromosomas pode não ser integralmente são, bastando que êle tenha sã a parte que no outroé anormal. Assim por exemplo, em uma experiência de cruzamento de animais, ambos defeituosos, pode ocorrer no entanto que o produto do cruzamento seja perfeitamente *normal, se os cromosomas tiverem defeitos em pontos diferentes.*

Há outros aspectos da genética moderna relacionados com o que se chama Rh.

O Rh é ainda uma característica bastante desconhecida; trata-se de uma incompatibilidade sanguínea que não se sabe ainda a que atribuir. Há casos, por exemplo, de transfusão de sangue, em que os indivíduos devidamente examinados apresentam sangue compatível e, no entanto, feita a transfusão com indivíduos que têm Rh diferente, resulta a morte. No caso de uma mulher que tenha o Rh positivo casada com homem que tenha Rh negativo, o produto quase sempre aborta e ha tremendas complicações, antigamente atribuidas à sífilis.

Todos êsses pontos apresentam grande interêsse para o seguro de vida e seria conveniente um estudo sistemático nesse sentido.

Acho, pois, muito interessante o trabalho apresentado e gostaria que o Sr. Friedmann prosseguisse em suas pesquisas e que, de vez em quando, pudessemos dispôr de alguns momentos de conversação para podermos trocar nossos pontos de vista, juntamente com outros atuários que se interessassem pelo mesmo assunto.

Herbert Josef Friedmann — Em primeiro lugar desejo agradecer ao Sr Celestin sua elogiosa referência, muito acima do merecimento do trabalho, e também ao Dr. Lyra Madeira o interessante comentário sôbre outros aspectos das questões correlacionadas com a parte ventilada.

Quero dar ainda uma pequena explicação da função $\varphi_i(o)$.

Levei apenas em conta seu valor zero. Como ponto de partida serviu a lei de Mendel e o exemplo numérico de uma transmissão dominante; de forma que, *para tornar bem claro o pensamento, me limitei a êsse caso particular e não* examinei em detalhe o aspecto mais interessante para o seguro de vida, o caso do indivíduo com uma certa idade atingida, mas apenas o do indivíduo recém-nascido, para o qual se tem uma determinada noção, se bem que limitada, quanto à probabilidade de manifestar-se ou não uma anomalia examinada. Fica aí a explicação dêsse detalhe.

CONTRÔLE DE RESPONSABILIDADE "EM RISCO"

Mário Trindade, A. I. B. A. Chefe da Divisão Estatística e Mecanização do I. R. B.

1. O problema básico de qualquer plano de excedente de responsabilidade é a apuração de responsabilidade em risco, a fim de se proceder à pulverização e à descarga dos excedentes das sucessivas faixas de retenção.

No ramo incêndio, p. ex., temos um risco delimitado e cumpre-nos determinar em função dos seguros ou resseguros realizados sôbre o mesmo e das respectivas alterações o total de responsabilidades em vigor em cada período, taxa média, prêmio a ceder ou retroceder.

No ramo Transportes a partir de 1946, com a criação do Pool "LAP" tornou-se necessária a apuração do total de responsabilidades do mercado nacional, representado pelas sociedades participantes daquele Pool, sôbre as mercadorias em viagem a bordo dos navios que trafegam na costa brasileira, em cada trecho de viagem, e o prêmio total auferido em cada viagem.

Em função desses elementos são determinados os excessos a ressegurar no exterior e respectivos prêmios.

O mesmo problema surge sempre que lidamos com os planos do tipo excedente de responsabilidade variando apenas a unidade em relação à qual é estudado o montante de responsabilidade e a duração dessa responsabilidade que é:

— o tempo, no caso dos seguros feitos por prazo determinado;

— um percurso de uma determinada viagem ou transporte de mercadorias, no caso de seguros por viagem.

Assim no seguro-vida por exemplo o risco é uma pessoa segurada e a variação do total da responsabilidade em vigor sôbre êsse risco é estudada em relação ao tempo.

No seguro-incêndio a unidade em relação à qual estudamos a responsabilidade, o "risco", é — conjunto de coisas ou bens suscetíveis de serem destruidos por um mesmo evento — e a variação do total dessa responsabilidade é estudada em relação ao tempo.

Já no seguro-transportes de mercadorias fazemos a apuração do total de responsabilidade a bordo de uma embarcação e estudamos a sua variação durante uma viagem, observando êsse montante em cada trecho do percurso.

Procuraremos apresentar aos leitores da Revista do I. R. B. quais os processos utilizados pelo I. R. B. na apuração das responsabilidades que aceita para realizar a sua retenção e distribuir os seus excessos.

2. O principio geral tem por base o método dos cartões perfurados, tendo sido utilizado o sistema Hollerith na resolução do problema.

Nesse sistema, a cada responsabilidade aceita sôbre um determinado risco, faremos corresponder um cartão contendo:

— identificação do risco........ R
— importância aceita........... I
— prêmio...................... P
— prazo em dias............... d
— início...................... i
— vencimento.................. v

A cada alteração efetuada em qualquer desses elementos faz-se corresponder um ou dois cartões de acôrdo com instruções precisas e rigorosas, utilizando-se o princípio contabil do estôrno da parcela alterada e novos lançamentos.

No caso de termos que apurar seguros feitos por viagem, são substituídos os elementos.

— prazo, em dias, pelo número da viagem
— início, pelo pôrto de origem
— vencimento, pelo pôrto de destino

Do mesmo modo a qualquer alteração desses dados faz-se corresponder um ou dois cartões de acôrdo com as instruções correspondentes.

O método aplicado pode ser então ilustrado pelas aplicações ao ramo Incêndio (que é idêntico a todos os demais em que se estuda a variação da responsabilidade no tempo) e ao ramo Transportes onde estudamos a variação das responsabilidades em risco numa dada viagem de uma embarcação.

3. A aplicação ao ramo Incêndio.

Uma vez obtidos os cartões de cessão sôbre cada risco são calculados os respectivos "prêmios diários", isto é, o prêmio cedido na unidade de tempo.

— quociente do prêmio cedido pelo prazo, em dias, da cessão

Após êsse cálculo, e terminada a remessa por parte de tôdas as sociedades das cessões que abrangem o período a estudar, realiza-se a tabulação segundo o seguinte esquema:

RISCO	INÍCIO	IMPORTÂNCIA RESSEGURADA EM VIGOR	PRÊMIO DIÁRIO EM VIGOR
1	01.01.46		
2	02.03.46		
3			

Para obtenção da tabulação ácima são ainda reproduzidos os cartões acima mencionados de modo a obter-se, para cada cartão de cessão ou cancelamento, um cartão de sinal contrário, destinado a anular o primeiro a partir da data do vencimento dêste. Desta forma, tendo o cartão reproduzido sinal contrário e como data de início a data do vencimento do prêmio, é bastante ordenarmos a tôda a massa em ordem de risco-início e fazermos a soma algébrica e progressiva (acumulada) para cada risco de todos os cartões de cessão e cancelamento, com sub-totais em cada data em que tenha havido qualquer alteração no risco para obtermos o total de responsabilidade aceita pelo I. R. B. e o prêmio da unidade de tempo correspondente àquela responsabilidade, em cada período durante o qual não houve alteração no risco — que é o período compreendido entre duas datas consecutivas de alterações.

Obtemos assim cartões-resumo — chamados cartões de risco-periodo — contendo a identificação do risco (inclusive elementos determinantes da retenção — como p. ex. LOC — número de limites), o total de responsabilidade em vigor, o prêmio diário em vigor, a data do início do respectivo período e a diferença entre essa data e a data da primeira alteração posteriór ou seja a data do início do cartão seguinte, relativo ao mesmo risco ou a data que marca o fim do período em estudo.

Temos então todos os elementos que nos permitem realizar o cálculo da retenção e das diferentes retrocessões do I. R. B. Vejamos como:

Em cada um dos cartões de risco período constam os dados:

Identificação Risco.............	R
Importância ressegurada em vigor.	I_r
Prêmio diário em vigor.........	P_d
Prazo em dias.................	t

de modo que o prêmio auferido pelo I. R. B. no período de t dias será

$$P = t \cdot P_d$$

o prêmio assim determinado deverá ser distribuido pelas diferentes faixas:

retenção do I. R. B............	r_0
retrocessão ao 1.° excedente.....	r_1
retrocessão ao 2.° excedente.....	r_2
retrocessão ao 3.° excedente.....	r_3
retrocessões avulsas.............	r_4

de acôrdo com a seguinte equação

$$P = \frac{P}{I_r}(r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$$

isto é, calculando-se o prêmio relativo ao período t, por unidade de Importância, ressegurada, e multiplicando-se em seguida pela retenção de cada faixa de retrocessão, de modo que

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = I_r$$

podendo os r se anularem de r_4 ao r_1 sucessivamente, se I_r não exceder a capacidade dos 3.°, 2.°, 1.° excedentes e do I. R. B.

Desta forma, os prêmios serão

$$P_{irb} = \frac{r_0 P}{I_r}$$

$$P_1 = \frac{r_1 P}{I_r}$$

....

$$P_4 = \frac{r_4 P}{I_r}$$

A determinação de $r_0, r_1, r_2, \ldots r_4$ faz-se tendo em vista o número índice da Tabela da Imaginária S. A., correspondente ao LOC do risco, conforme o Manual de Resseguro Incêndio e o número de plenos de cada faixa de retrocessão do I. R. B. de acôrdo com os atuais planos de retrocessão.

A aplicação do plano aos demais ramos, como por exemplo os ramos Vida e Acidentes Pessoais, faz-se do mesmo modo, mudando-se naturalmente os elementos definidores do risco e os números índices e tabelas de retenção.

4. Aplicação ao ramo Transportes

Conforme já indicamos acima, o contrôle da responsabilidade em risco no ramo Transportes faz-se relativamente a cada trecho da mesma viagem de u'a mesma embarcação.

Tal contrôle, de há muito estudado pelos técnicos da Divisão de Estatística do I. R. B., não pôde ser aplicado durante a guerra pelas circunstâncias de não poderem ser conhecidos o nome da embarcação em que deveria viajar determinada mercadoria.

Com a criação do concórcio "LAP" no início de 1946, coube à D.E. a responsabilidade de realizar, em cooperação com a Divisão-Transportes, o contrôle de responsabilidades em risco, a extração das contas mensais às sociedades participantes de consórcio e o fornecimento dos dados para as retrocessões ao mercado internacional.

Em 1947, com a modificação do Consórcio e o desdobramento dos planos de operações do I. R. B. em dois planos — o plano *A* e o plano *B*, coube ainda a *D.E.* — hoje Divisão de Estatística e Mecanização — o encargo de controlar, inclusive os *C. E. M.* — Cessão de Excedente Marítimo — das sociedades do plano *B*, além de manter o contrôle relativo às sociedades com cessão integral (plano A).

Feito êsse histórico, passamos a dar aos leitores da Revista do I. R.B. uma idéia da organização dêsse trabalho sem, entretanto discriminar -mos os trabalhos relativos aos planos *A* e *B*

Inicialmente, torna-se necessária a organização dos códigos destinados ao serviço que são:

— o código de navios
— o código de portos
— o código de sub-ramo
— o código de objeto do seguro (mercadorias)

O código de navios deve possibilitar a rápida classificação do mesmo, segundo a tabela de retenção.

O código de portos, entretanto é o que tem maior importância, pois deve ser constituido de números ordenados segundo um critério tal que atenda às diferentes escalas que um navio possa realizar na mesma ordem em que êste o faça.

Damos abaixo êsse código para facilitar a compreensão do princípio que expusemos.

O código de portos foi organizado em ordem crescente Norte — Sul, obedecendo rigorosamente à ordem geográfica.

Cada Unidade da Federação teve os seus portos numerados de 1 a 8 sendo empregados: o número 9 para "outros portos" que não foram codificados, ou portos fluviais, e o número 0 para as Capitais quando coincidiu ser a Capital o primeiro pôrto.

O código é formado de quatro algarismos, sendo o 1.° referente a portos brasileiros (código 1) ou estrangeiros (código 2); os 2.° e 3.° algarismos se referem ao código das Unidades Federadas, que é formado por faixas para cada região; o 4.° se refere ao número do pôrto naquela Unidade da Federação.

Exemplos:

Viagens — Norte-Sul

Salvador	1.320
Ilhéus	1.322
Rio	1.360
Santos	1.415

Viagens — Sul- Norte

Santos	1.415
Rio	1.360
Ilhéus	1.322
Salvador	1.320

Nas viagens continentais, feitas pelo Canal do Panamá, o prefixo dos portos estrangeiros passa a ser 0, enquanto que, nas viagens feitas pelo Estreito de Magalhães continua com o prefixo 2, pois a ordem dos códigos dos paises Sul Americano é crescente do Sul para o Norte.

Os portos de Mato Grosso, devido a sua situação geográfica, receberem numeração especial como se pertencessem a um outro país.

Foram também adotados códigos para os principais portos existentes nas grandes bacias fluviais.

Viagem

CÓDIGO DE PORTOS

(Órdem numérica)

ABREVIATURA	CÓDIGO	PÔRTO	OBSERVAÇÃO
Gr.	1 111	Guajará-Mirim	(Rio Madeira)
	1 112	Pôrto Velho	(Nos seguros aéreos, terrestres e postais usar o código (1 110)
	1 119	Outros	
Ac	1 120	Rio Branco	(Rio Purús)
	1 121	Cruzeiro do Sul	(Rio Jurua)
	1 129	Outros	
Am	1 131	Tabatinga	(Rio Solimões)
	1 132	Maguarí	(Rio Japurá)
	1 133	Uaupés	(Rio Negro) (ex-S. Gabriel)
	1 134	Humaitá	(Rio Madeira)
	1 135	Manáus	(Nos seguros aéreos, terrestres e postais usar o código 1 130)
	1 136	Itaocatiára	
	1 137	Urucurituba	
	1 138	Parintins	
	1 139	Outros	
Pa	1 151	Faro	
	1 152	Óbidos	
	1 155	Alenquer	
	1 153	Itaituba	(Rio Tapajós)
	1 154	Santarém	
	1 156	Monte Alegre	
	1 157	Prainha	
	1 158	Altamira	(Rio Xingú)
	1 159	Outros	
Ap.	1 160	Macapá	
Pa.	1 161	Afua	
Ap.	1 162	Amapá	
	1 169	Outros	
Pa.	1 171	Gurupá	
	1 172	Breves	
	1 173	Curralinho	
	1 174	Marabá	(Rio Tocantins)
	1 175	Cameta	(Rio Tocantins)
	1 176	Belém	(Nos seguros aéreos, terrestres e postais usar o código 1150
	1 177	Vizeu	
	1 179	Outros	
Ma.	1 212	Turiaçú	
	1 213	Curupurú	
	1 214	Alcântara	
	1 215	São Luiz	(Nos seguros aéreos, terrestres e postais usar o código 1 210)
	1 216	Tutóia	
	1 217	Balsas	(Rio das Balsas) (ex Santo *Antônio* das Balsas)
	1 218	Barra do Corda	(Rio Mearim)
	1 219	Outros	
Pi.	1 220	Alto Parnaiba	(Rio Parnaíba)
	1 221	Floriano	(Rio Parnaiba)
	1 222	Amarante	(Rio Parnaíba)
	1 223	Teresina	(Rio Parnaíba, nos seguros aéreos, terrestres e postais usar código 1 220)
	1 224	Miguel Alves	(Rio Parnaíba)
	1 225	Luzilândia	(Rio Parnaíba) (ex-Pôrto Alegre)
	1 226	Parnaíba	
	1 227	Amarração	
	1 229	Outros	
Ce.	1 231	Camocim	
	1 232	Fortaleza	(Nos seguros aéreos, terrestres e postais usar *o código 1 230)*
	1 223	Aracatí	
	1 239	Outros	
Rn.	1 241	Areia Branca	
	1 241	Mossoró	
	1 241	Pôrto Franco	

ABREVIATURA	CÓDIGO	PORTO	OBSERVAÇÃO
	1 242	Macáu	
	1 243	Natal	(Nos seguros aéreos, terrestres e postais usar o código 1 240)
Pb.	1 250	Cabedelo	
	1 250	João Pessôa	
	1 259	Outros	
Pe.	1 260	Recife	
	1 261	Petrolina	(Rio S. Francisco)
Ba.	1 261	Juazeiro	(Rio S. Francisco)
Pe.	1 262	Petrolândia	(Ex.Itaparica) (Rio S. Francisco)
	1 269	Outros	
Al.	1 270	Maceió	
	1 270	Jaraguá	
Al.	1 271	Marechal Floriano	(Rio S. Francisco) (ex-Piranhas)
	1 272	Penedo	
	1 279	Outros	
Se.	1 311	Propriá	
	1 312	Aracajú	Nos Seguros aéreos, terrestres e postais usar o código 1 310)
	1 319	Outros	
Ba.	1 320	Salvador	
	1 321	Maragogipe	(Baia de Todos os Santos)
	1 322	Ilhéus	
	1 323	Canavieiras	
	1 324	Belmonte	
	1 325	Pôrto Seguro	
	1 326	Prado	
	1 327	Alcobaça	
	1 328	Caravelas	
	1 328	Ponta da Areia	
	1 329	Outros	
Mg.	1 332	Januária	(Rio São Francisco)
	1 333	Pirapora	(Rio São Francisco)
	1 339	Outros	
Es.	1 341	Conceição da Barra	
	1 342	São Mateus	
	1 343	Aracruz	(Ex-Santa Cruz)
	1 344	Vitória	(Nos seguros aéreos terrestres e postais usar o código 1 340)
	1 345	Guarapari	
	1 346	Anchieta	
	1 347	Benevente	
	1 348	Itapemerim	
	1 349	Outros	
Rj.	1 351	São João da Barra	
	1 351	Atafona	
	1 352	Macaé	
	1 353	Cabo Frio	
	1 354	Niterói	(Nos seguros aéreos terrestres e postais usar o código 1 350)
	1 359	Outros	
	1 361	Angra dos Reis	
	1 362	Parati	
	1 369	Outros	
Sp.	1 411	Ubatuba	
	1 412	Caraguatatuba	
	1 413	Vila Bela	
	1 414	São Sebastião	
	1 415	Santos	
	1 416	Itanhaém	
	1 417	Iguape	
	1 418	Cananéia	
	1 419	Outros	
Pr.	1 421	Antonina	
	1 422	Paranaguá	
	1 429	Outros	
Sc.	1 441	São Francisco do Sul	(Ex- São Francisco)
	1 442	Joinville	
	1 443	Blumenáu	

ABREVIATURA	CÓDIGO	PÔRTO	OBSERVAÇÃO
	1 444	Itajaí	
	1 445	Florianópolis	(Nos seguros aéreos, terrestres e postais usar o código 1 440)
	1 447	Laguna	
	1 449	Outros	
Rs.	1 451	Sta Vitória do Palmar	
	1 452	Jaguarão	
	1 453	Rio Grande	
	1 454	Pelotas	
	1 455	Pôrto Alegre	(Nos seguros aéreos, terrestres e postais usar o código 1 450)
	1 456	Cachoeira do Sul	(Ex-Cachoeira) (Rio Guaíba)
	1 459	Outros	
Go.	1 531	Tocantinópolis	
	1 532	Pôrto Nacional	
	1 539	Outros	
Ur.	2 020	Montevidéu	
Ar.	2 030	Buenos Aires	
Pg.	2 040	Assunção	
Mt.	2 041	Pôrto Murtinho	
Mt.	2 042	Corumbá	

Conforme já vimos, para o ramo Incêndio a responsabilidade em risco é o saldo em vigor da importância segurada ou ressegurada — segundo um critério em relação ao tempo ou, no caso do ramo Transporte em relação aos trechos de viagem.

A identificação do risco é feita mediante os dados:

Código do navio

Número de viagem

Tipo (se Sul-Norte ou Norte-Sul)

Os cartões, nessa ordem, são inicialmente separados também, pelos portos de embarque, extraindo-se, para cada pôrto de embarque um cartão-resumo contendo o total de responsabilidade sôbre as mercadorias embarcadas, de cada navio e de cada viagem.

Um outro resumo é feito por desembarque, extraindo-se então um outro cartão-resumo, com o total de responsabilidade sôbre mercadorias desembarcadas.

É de notar-se que, em ambos os casos, os resumos estão ordenados na mesma ordem, isto é, crescente ou decrescente, sendo a viagem Norte-Sul ou Sul-Norte, respectivamente.

A tabulação conjunta desses dois tipos de cartões considerando-se positivo o cartão de embarque e negativo o cartão de desembarque, somando-se algebricamente e inscrevendo-se o total progressivo, de acôrdo com o quadro abaixo, obtem-se o total de responsabilidade a bordo entre dois portos de escala consecutivos. Desta forma, e acumulando-se o prêmio auferido na viagem que é a soma dos prêmios de tôdas as averbações aceitas sôbre embarques nesse navio e nessa viagem podemos realizar o cálculo do prêmio de retenção da sociedade, se fôr o caso o prêmio cedido ao I. R. B. e a distribuição desse prêmio entre o I. R. B. e os retrocessionários, da maneira que exporemos a seguir.

Seja I_r o total de responsabilidade a bordo no chamado "trecho de cumulação máxima". Seja P o total de prêmios auferidos na viagem, P a retenção da sociedade nessa classe de navios, r_0 a retenção do I. R. B., r_1 a retenção do mercado brasileiro, em retrocessão e r_2 a retrocessão ao mercado internacional.

O esquema de retrocessão do ramo Transportes obedece sempre à premissa de lotar o mercado. Desta forma, o total retido pelo mercado nacional em seguro direto e retrocessão é constante e igual a R, para cada tipo de navio, ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} p_i + r_0 + r_1 = R_n$$

onde p é a retenção das sociedades que aceitaram seguros diretos, fazendo-se distribuição de r_1 entre tôdas as sociedades que não estejam incluidas entre as que aceitaram diretamente seguros sôbre aquêle navio—viagem e aquelas que, embora tenham aceito seguros diretos, não hajam esgotado a sua capacidade de retenção.

Nos casos em que $I_r \leq R_n$ a diferença

$$I_r = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i + r_0 \right)$$

é a importância distribuída proporcionalmente aos saldos das capacidades de retenção.

5. A utilidade desse trabalho é indiscutível, permitindo ao IRB que tem a responsabilidade da gestão técnica do mercado de seguros do Brasil, tomar decisões, baseado em dados concretos, em levantamentos como, por exemplo, o levantamento das suas carteiras Vida, Acidentes Pessoais e Incêndio, ora em andamento, para o estudo dos respectivos planos de retenção e retrocessão. No planejamento da reforma do plano de operações do ramo Transportes foram utilizados, em 1946, os dados obtidos nas apurações do Consórcio LAP, que permitiram inclusive, estimativas bastante precisas do volume de receita, volume de formulários (averbações, RAT, CEM etc.) de grande utilidade para a administração. Por outro lado, procurou-se evitar o que vinha acontecendo — a demora em determinar o nome do navio transportador, que acarretava grandes demoras à determinação das apurações sôbre determinados navios e consequentemente, a emissão de contas e demonstrações de resseguro e retrocessão.

RESUMO DA DISCUSSÃO

Renato de Castro — Trata o trabalho apresentado pelo AIBA Mário Trindade do contrôle da responsabilidade em risco.

O problema a resolver consistia em determinar qual a responsabilidade em risco num determinado instante, a fim de que a distribuição da mesma fôsse feita entre o Instituto de Resseguros do Brasil e as companhias seguradoras.

Em outras palavras, tratava-se de determinar o valor, em cada instante, das responsabilidades cedidas ao I. R. B. pelas seguradoras diretas e devendo ser distribuidas por êsse Instituto.

O problema foi resolvido utilizando-se o método de cartões perfurados, tendo sido empregado o equipamento Hollerith.

A solução adotada consistiu em estabelecer-se um cadastro das responsabilidades em vigor para os diferentes riscos e em manter-se êsse cadastro em dia, introduzindo-se no mesmo as alterações verificadas, conforme se fossem elas verificando.

Esse trabalho foi feito utilizando-se, para cada aceitação, um cartão, contendo as indicações necessárias para a identificação do risco e para a caracterização da responsabilidade; estas últimas são as seguintes:

— importância aceita
— prêmio
— prazo da responsabilidade
— data de início da responsabilidade
— data da terminação da responsabilidade

No caso dos seguros do ramo Transporte, realizados por viagem, os três últimos elementos são substituidos pelas indicações do número da viagem e dos portos de origem e destino.

Qualquer alteração nos elementos supra é objeto de um ou dois cartões.

Preparados assim os cartões, procede-se à determinação do "prêmio diário" com base nos elementos que neles figuram; essa determinação é feita dividindo — se o prêmio que se contem no cartão pelo prazo de responsabilidade, em dias.

Os cartões acima mencionados são reproduzidos com alteração da data de início da responsabilidade, que é substituida pela data da terminação respectiva.

Estes cartões são cartões negativos, sendo os seus valores sempre subtraídos dos cartões anteriores, que são os cartões positivos.

Obtidos os dois jogos de cartões acima, os mesmos são separados pelos diferentes riscos e ordenados pela respectiva data de início, fazendo-se em seguida a respectiva tabulação, com sub-totais relativos às diferentes datas de alteração.

É fácil verificar que, procedendo-se à tabulação dessa forma, o sub-total correspondente a cada data de alteração, obtido fazendo-se a soma acumulada para cada risco, fornece a responsabilidade no período entre a alteração anterior e a considerada.

É fácil assim obter o valor da responsabilidade em cada ocasião, ou melhor, em cada um dos períodos entre as alterações consecutivas, bem como o prêmio correspondente ao período, o que permite a fácil distribuição da responsabilidade.

Para cada risco obtêm-se assim vários cartões resumo — os cartões risco período — que fornecem o valor da responsabilidade em vigor, em cada um dos períodos citados.

Este método é o empregado no caso do seguro Incêndio, podendo ser aplicado a todos os demais ramos em que se precisa estudar a variação da responsabilidade no tempo.

No caso do ramo Transportes, em que é necessário estudar a variação da responsabilidade em uma viagem de uma dada embarcação, o método adotado é semelhante, tomando-se entretanto por base não o período de tempo entre duas alterações, mas o trecho de viagem entre cada duas escalas consecutivas.

Neste caso os cartões são dispostos na ordem das diferentes escalas do navio, de acôrdo com um código dos portos, estabelecido tendo-se em vista a respectiva posição geográfica.

São preparados cartões para as responsabilidades assumidas sôbre as mercadorias embarcadas em cada navio e em cada viagem, para cada pôrto de embarque.

São feitos também cartões semelhantes para os desembarques, relativos às responsabilidades cessantes.

Os primeiros cartões são positivos e os segundos negativos.

A tabulação dêsses cartões é praticada de forma análoga à exposta anteriormente, assim se obtendo o contrôle da responsabilidade em risco.

A exposição do método adotado mostra uma aplicação interessante do método de cartões perfurados, vindo salientar mais uma vez as grandes possibilidades que encerra o seu uso.

Os resultados conseguidos são, por outro lado, de indiscutível utilidade, pois o método permite a apuração rápida e fácil da responsabilidade em vigor em cada caso, possibilitando o conhecimento exato da situação e a execução das retrocessões.

Parecem-nos de especial interêsse no trabalho e dignos de menção especial, o critério de utilização de cartões negativos e o de somas acumuladas com sub-totais correspondentes a cada alteração ou escala de navio; nas mesmas condições está o critério adotado para a organização do código de portos.

A conclusão do autor mostra por outro lado, as vantagens já obtidas com a aplicação do método.

Mario Trindade — Preliminarmente, desejo pedir desculpas aos colegas do I. B. A., por tratar de assunto tão prosáico em comparação ao que os Drs. Madeira e Friedmann acabaram de tratar e que diz respeito a coisas muito mais alevantadas, como é a vida em sua essência.

Mas a realidade é que todos nós, que lidamos com seguro, temos problemas como aquele versado pelos Drs. Friedmann e Madeira, como também temos dêsses que o Dr. Renato acabou de analisar. Eu queria apresentar alguma coisa que reputo de utilidade a todos os que têm responsabilidade na administração de um plano de seguro ou resseguro, com a experiência colhida nosnossos trabalhos diários.

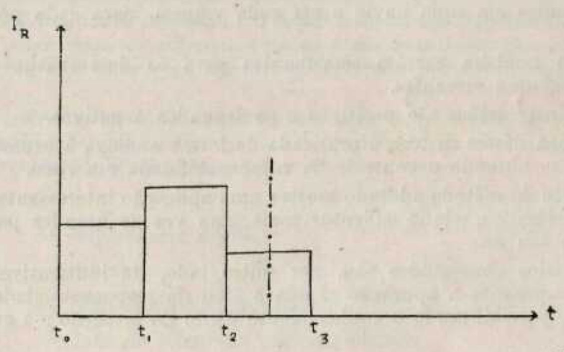
Vamos deixar anotada aqui, por escrito, uma justificação um pouco mais clara da forma que apresentei para o cálculo da distribuição de prêmios; quero, entretanto, tecer agora algumas considerações, visando dar uma idéia da evolução dessa matéria que foi apresentada no trabalho e que já sofreu transformações com o tempo, pois apresentei êsse trabalho no ano passado, quando o método estava ainda em seus primeiros passos.

Já temos bastantes modificações e melhorias introduzidas. A idéia que demos nesse trabalho é estática, pois figuramos somente um grupo de riscos sôbre os quais foi feita uma série de cessões, e o problema de calcular a responsabilidade em vigor em cada período e de a distribuir, em conseqüência, entre as diferentes caixas de retenção. Deixamos de mencionar o problema da conjugação prática das apurações com o recebimento dos documentos relativos a cada cessão.

Acontece que êsse esquema estático não se coaduna muito bem com as nossas necessidades diárias. Tenho, por exemplo, cêrca de 400 a 500 000 cessões, anualmente, só no ramo incêndio, e seria absurdo esperar que tôdas as cessões de um dado risco fossem feitas, rigorosamente em dia, por tôdas as companhias de seguro que conosco operam. Há, assim necessidade de tornar o método mais flexivel e foi isso que tentei.

Procurarei dar uma idéia rápida aos colegas.

Representando gràficamente a apuração final, em ordenadas a Importância Ressegurada (I_R) e em abcissas o tempo (T), obtemos uma distribuição de capitais com a forma da figura:



Temos, nêste gráfico, a importância ressegurada e o período de tempo em que a mesma esteve em vigor num determinado risco R.

Acontece, entretanto, que êsses valores são o resultado de uma série de diferentes cessões feitas, chegadas ao Instituto em diferentes períodos. Uma Companhia aceita uma responsabilidade e só vai verificar a existência de um excesso em risco, digamos, 2 ou 3 mêses depois de iniciada a responsabilidade. Dêste modo, quando já estamos em certa data, manda uma alteração de data anterior e será necessário refazer todo o trabalho ou então, extornar êsses elementos e tornar a apurar já com os novos elementos.

Foi adotado, para resolver êsses problema, o seguinte critério: caracterizamos cada uma das apurações por um número, aliás um código, que nos dá a indicação do ano e da quinzena. (*)

Dêsse modo, sabemos em cada instante que tôdas as responsabilidades, entradas até uma determinada quinzena, foram distribuidas e as que entrarem daí por diante terão de ser distribuidas.

Exemplifiquemos: fazemos uma apuração como aquela aqui figurada, para remessa 915, mas na remessa 925 ha novas responsabilidades sôbre o mesmo risco

e que abrangem qualquer um dêsses períodos. Faremos, então, uma nova apuração acumulando-se, em um contador, as responsabilidades entradas até a penúltima remessa e, noutro contador, as responsabilidades entradas até a última.

Desse modo temos a cada momento, na apuração, os dois diagramas, o imediatamente anterior, com tôdas as responsabilidades anteriores cedidas até a penúltima remessa apurada, e no segundo diagrama aquelas cedidas até a última remessa apurada. Temos, desta forma, um esquema que se adapta continuamente à evolução dos capitais em vigor nos diferentes riscos.

Eram êsses os esclarecimentos que queria prestar. O assunto envolve uma série de outros detalhes, sôbre os quais poderei esclarecer mais particularmente a todos os colegas que estiverem interessados.

Para terminar, desejo agradecer a benevolente atenção dos colegas.

(*) As remessas por parte das Companhias são quinzenais

UMA SIMBOLOGIA RACIONAL DAS FÓRMULAS DOS "EXPOSTOS AO RISCO"

E. Olifiers. F. A. S.; A. I. A.; M. I. B. A.; etc.

Introdução

Sob êste título tive o ensejo de apresentar à Assembléia Técnica do I. B. A. de setembro de 1945 um estudo sôbre os expostos ao risco publicado no Boletim do I. B. A. de 1947.

Em 1947 foi publicado no *Transactions of the Actuarial Society* de Maio (*Vol. XLVIII Part one N.º 117*) um estudo sôbre o mesmo assunto intitulado *"The Evolution of the Exposure Formulae"* que trata da evolução das fórmulas dos expostos ao risco usadas pelos Atuários Ingleses nas investigações da mortalidade dos segurados no qual usei uma simbologia mais simples que a usada no estudo publicado no Boletim do I. B. A.

A respeito dêste último estudo o *Journal* do *"Institute of Actuaries"* no *Vol. LXXIV Part I N.º 338* publicou sob a rubrica *"Notes on Foreign actuarial Journals" by Sir W. P. Elderton*, C. C. Nicholl and H. L. Seal a seguinte referência:

"E. Olifiers. The Evolution of the Exposure Formulae pp 76-94. A careful study which will be helpful to those who prefer to express exposed to risk in algebraic form but others would have been helped by arithmetical examples". (*)

Esta apreciação me impressionou por ser Sir *W. P.* Elderton o autor do método do Censo Inglez usado para achar os expostos ao risco nas investigações da mortalidade dos segurados de 1924-1929 e nas subsequentes investigações publicadas periodicamente no *Journal of the Institute of Actuaries* a que me referi detalhadamente nesses dois estudos e notadamente no publicado no Boletim do I. B. A. no capítulo intitulado. "INVESTIGAÇÃO DA MORTALIDADE INGLEZA DE 1924-1929".

(*) Um estudo cuidadoso que ajudará aos que preferirem exprimir os expostos ao risco sob forma algébrica, outros porém teriam sido ajudados por processos aritméticos

O método de censo usado para achar os expostos ao risco nestas investigações veiu substituir o método de seguro que adotava fichas individuais usado nas três primeiras investigações de mortalidade dos segurados feitas pelo *Institute of Actuaries*, o qual era demasiadamente laborioso e ocasionava demora na publicação dos resultados. Num livro publicado em 1912, intitulado *Construction of Mortality and sickness tables* por W. P. Elderton and Richard Fippard, de que há um exemplar na biblioteca Albernaz, os autores estudaram minuciosamente êstes dois métodos. O capítulo VII dêste livro intitulado "Aplicação do Método do Censo aos dados do Seguro" principia como segue:

"Antes de discutir a aplicação do método aos dados de seguros será aconselhável apontar mais definitivamente do que tenha sido feito até então que há uma diferença essencial entre o método de censo e os métodos de seguros já descritos".

Um dos fins dos meus dois estudos acima mencionados foi mostrar que a diferença essencial entre êstes dois métodos desaparece quando se substitue o conceito duma distribuição "a" (after) e "b" (before) dos falecimentos ou outros acontecimentos observados sôbre os anos de seguro ou de vida à suposição duma distribuição uniforme sôbre êsses anos. Este conceito duma distribuição "a" e "b" é assim chamado por mim para designar as duas partes dos anos de seguro ou de vida em curso na data do censo e que decorrem dos aniversários até esta data designada por "a" (após) e desta data até o fim desses anos, designada por "b" (antes). Conforme frisei em meus dois mencionados estudos, várias objeções foram levantadas contra o método de censo tal como foi aplicado na investigação da mortalidade Ingleza — 1924-1929, as quais constam de um livro intitulado "Mortality of Assured Lives 1924-1929" publicado pelo "Institute of Actuaries" em 1935. Estas objeções tais como a existência de taxas de mortalidade maiores que um devido notadamente à mencionada suposição são eliminadas pela aplicação do citado conceito.

Da apreciação reproduzida do "Journal of Institute of Actuaries" consta outrosim que: "outros atuários teriam sido ajudados por exemplos aritméticos" no estudo das fórmulas dos expostos risco. Espero poder fazê-lo uma vez que o Serviço Atuarial do Ministério do Trabalho, Indústria e Comércio poderá dispôr do censo dos segurados e beneficiários das instituições de previdência social pedido pela Portaria N.º 12 de 31 de maio de 1948 em tão boa hora expedida pelo nosso colega Paulo Leopoldo Pereira da Câmara, diretor do Serviço Atuarial. Não posso deixar de recordar que foi graças a êsse nosso colega que me foi dado expôr, na Revista Brasileira de Atuária de Outubro de 1942 Vol. 2 N.º 3 sob o título "Duma Investigação Anual de Mortalidade e de Desistência", meu primeiro estudo das fórmulas dos expostos ao risco, a aplicação, aos dados estatísticos do Seguro de Vida do método de censo e do conceito de distribuição "a" e "b". Só pouco tempo depois de ter sido publicado, êsse estudo é que me ocorreu o procedimento a seguir na aplicação desse conceito ao método de seguro.

OBJETO DÊSTE ESTUDO

Como o Serviço Atuarial do M.T.I.C. tenciona construir tábuas de decrementos e incrementos para as Caixas e Institutos, vou tratar no que segue das fórmulas a serem usadas na construção das mesmas. Nos dois citados estudos tratei sumariamente da construção destas tábuas. Desde então foi publicado em 1946 para o "Institute of Actuaries" e a "Faculty of Actuaries of Scotland" uma brochura intitulada "Some Theoretical Aspects of Multiple Decrement Tables" por W. G. Bailey e H. W. Haycocks em que as fórmulas a serem usadas para a construção destas tábuas *foram derivadas da suposição duma distribuição uniforme dos* decrementos sôbre os anos de seguros ou de vida. Vou no que segue referir-me a esta brochura para provar a necessidade de substituir a esta suposição ,o conceito da distribuição "a" e "b" para achar as fórmulas usadas nessa construção.

DECREMENTO E INCREMENTO MULTIPLOS

A citada brochura foi escrita para estudantes, como se pode ver da página 30. Nessa página-os autores observam que não tentaram tratar tôda a matéria referente às tabuas de decremento multiplo e tiveram por finalidade mais a de pôr os estudantes em contacto com os fundamentos ou princípios básicos. Os autores solicitaram o estudo e a discussão do assunto. Não tratarei aqui de outros aspectos do assunto como os que foram levantados e tratados no Jornal dos Estudantes do "Institute of Actuaries" pela publicação da citada brochura, notadamente no que disse ao conceito "seletivo ou dependente e independente" o qual deu ensejo a uma troca de correspondência interessante a ler entre os Autores e o Editor do mencionado jornal. Por êsse motivo publicou-se naquele Jornal uma tradução em Inglez do teorema de Karup (Vol. VIII Part 2 October 1948). Vou limitar êste estudo às relações matemáticas das tábuas de decrementos múltiplos que facilitam sua construção. No paragrafo 12 que trata das relações matemáticas entre "the parent tables" e "the single decrement tables" os autores da brochura entendem por "parent table" a tábua construída

pelas probabilidades designadas por q_x no mencionado estudo sendo

$$q_x = q_x^{(1)} + \dots + q_x^{(r)} + \dots + q_x^{(n)} \quad \text{e} \quad ''n''$$

acontecimentos observados e por "single decrement tables" as tábuas construídas pelas taxas designadas por

$$\bar{q}_x^{(1)} \cdots \bar{q}_x^{(r)} \cdots \bar{q}_x^{(n)}$$

No que se segue empregarei as palavras taxas dependentes em vez de probabilidades para designar as taxas usadas na construção da tábua dependente de decrementos multiplos (parent table) e taxas independentes para designar as taxas usadas na construção das tábuas independentes (single decrement tables). Neste estudo não se dá aos objetivos "dependente" e "independentes" o sentido dado pelos autores da brochura a estas palavras, mas sim ao modo com que a construção das tábuas foi feita, usando quer as taxas dependentes quer as taxas independentes. Com efeito, as taxas:

$$q_x = \frac{\Theta_x}{e_{\underline{x|}} + {}_a\Theta_x} = \frac{m_x}{1 + {}_am_x}\text{; e } q_x^{(r)} = \frac{\Theta_x^{(r)}}{e_{\underline{x|}} + {}_a\Theta_x} = \frac{m_x^{(r)}}{1 + {}_am_x} \qquad (1)$$

em *que* $\Theta_x = \Theta_x^{(1)} + \dots + \Theta_x^{(n)}$ e ${}_a\Theta_x = {}_a\Theta_x^{(1)} + \dots + {}_a\Theta_x^{(r)} + \dots + {}_a\Theta_x^{(n)}$

são chamadas taxas dependentes por serem as fórmulas com que se acham os valores dos expostos ao risco dependentes de ocorrência de $''n''$ acontecimentos enquanto as taxas:

$$\bar{q}_x^{(r)} \doteq \frac{\Theta_x^{(r)}}{e_{\underline{x|}} + {}_a\Theta_x^{(r)}} \doteq \frac{m_x^{(r)}}{1 + {}_am_x^{(r)}} \qquad (2)$$

são chamadas taxas independentes por serem as fórmulas com que se acham os valores dos expostos ao risco independentes de ocorrência de todos os outros acontecimentos que não (r). Nas taxas (1) e (2) $e_{\underline{x|}}$ significa os existentes na data do censo

$$m_x^{(r)} = \frac{\Theta_x^{(r)}}{e_{\underline{x|}}}\text{; } {}_am_x^{(r)} = \frac{{}_a\Theta_x^{(r)}}{e_{\underline{x|}}} \text{ e } m_x^{(r)} = {}_am_x^{(r)} + {}_bm_x^{(r)}$$

representam as taxas centrais na idade X do acontecimento (r) ocorre durante os anos de seguros ou de vida em curso na data do censo e ${}_a m_x^{(r)}$, ${}_b m_x^{(r)}$ as respectivas taxas centrais de (r) ocorrer na parte "a" ou na parte "b" desses anos. As taxas centrais m_x se referem aos "n" acontecimentos, isto é,

$$m_x = m_x^{(1)} + \ldots + m_x^{(r)} + \ldots + m_x^{(n)}$$

Expressões similares podem ser escritas para ${}_a m_x$ e ${}_b m_x$. Deve se notar que em (1)

$$q_x = {}_a q_x + {}_b q_x \quad ; \quad q_x^{(r)} = {}_a q_x^{(r)} + {}_b q_x^{(r)}$$

e em (2)

$$\overline{q}_x^{(r)} = {}_a \overline{q}_x^{(r)} + {}_b \overline{q}_x^{(r)}$$

Na expressão (2) de $\overline{q}_x^{(r)}$ a notação $\doteq$ significa aproximadamente igual a porque os valores de $\overline{q}_x^{(r)}$ deveriam ser realmente achados de

$$\overline{q}_x^{(r)} = \frac{\theta_x^{(r)}}{e_{\underline{x|}} + {}_a\theta_x - f\,(\theta_x - \theta_x^{(r)})} \tag{3}$$

em que $f(\theta_x - \theta_x^{(r)})$ designa o tempo a decorrer desde a ocorrência de todos os acontecimentos salvo (r) até o fim dos anos de vida ou anos de seguros, f, designa, por conseguinte, a operação de somar os períodos fracionários entre as datas dos movimentos dos $n - 1$ acontecimentos e o fim dos anos de seguros ou de vida; o acontecimento (r) sendo exposto ao risco um ano inteiro. Na expressão (2) fez-se, por conseguinte, a suposição que

$${}_a\theta_x - {}_a\theta_x^{(r)} = f(\theta_x - \theta_x^{(r)})$$

Dividindo-se por $e_{\underline{x|}} + {}_a\theta_x$ o numerador e denominador do membro direito da igualdade (3) acha-se a seguinte relação entre as taxas dependente e independente de r ocorrer

$$\overline{q}_x^{(r)}\,[1 - f\,(q_x - q_x^{(r)})] = q_x^{(r)}$$

por onde se vê que:

$$q_x^{(r)} < \overline{q}_x^{(r)}$$

Na suposição de que

$${}_a\theta_x - {}_a\theta_x^{(r)} = f\,(\theta_x - \theta_x^{(r)})$$

a expressão (2) pode ser escrita como segue:

$$\overline{q}_x^{(r)} = \frac{q_x^{(r)}}{1 - ({}_a q_x - {}_a q_x^{(r)})}$$

As tábuas de decrementos múltiplos podem ser construídas das taxas (1) e (2) pela aplicação do teorema de Karup expresso pelas seguintes igualdades:

$$\overline{p}_x^{(1)} \ldots\ldots \overline{p}_x^{(r)} \ldots\ldots \overline{p}_x^{(n)} = p_x$$

ou

$$(1 - \overline{q}_x^{(1)}) \ldots\ldots (1 - \overline{q}_x^{(r)}) \ldots\ldots (1 - \overline{q}_x^{(n)}) = 1 - q_x \tag{4}$$

Substituindo a expressão (1) no membro direito de (4) e a expressão (2) no membro esquerdo de (4), dando a "r" os valores de 1 a n teremos:

$$\frac{e_{\underline{x|}} - {}_b\theta_x^{(1)}}{e_{\underline{x|}} + {}_a\theta_x^{(1)}} \cdots\cdots \frac{e_{\underline{x|}} - {}_b\theta_x^{(r)}}{e_{\underline{x|}} + {}_a\theta_x^{(r)}} \cdots \frac{e_{\underline{x|}} - {}_b\theta_x^{(n)}}{e_{\underline{x|}} + {}_a\theta_x^{(n)}} \doteq \frac{e_{\underline{x|}} - {}_b\theta_x}{e_{\underline{x|}} + {}_a\theta_x}$$

Multiplicando o membro esquerdo desta expressão e pondo em evidência $e_{\underline{x|}} - {}_b\theta_x$ e $e_{\underline{x|}} + {}_a\theta_x$, dividindo em seguida o numerador e o denominador por $(e_{\underline{x|}})^{n-1}$, resulta:

$$\frac{p_x + \sum {}_b q_x^{(1)} \cdot {}_b m_x^{(2)} - \sum {}_b q_x^{(1)} \cdot {}_b m_x^{(2)} \cdot {}_b m_x^{(3)} + \ldots + (-1)^n\, {}_b q_x^{(1)}\, {}_b m_x^{(2)} \cdot {}_b m_x^{(n)}}{1 + \sum {}_a q_x^{(1)} \cdot {}_a m_x^{(2)} + \sum {}_a q_x^{(1)} \cdot {}_a m_x^{(2)} \cdot {}_a m_x^{(3)} + \ldots + {}_a q_x^{(1)} \cdot {}_a m_x^{(2)} \cdot {}_a m_x^{(n)}} \doteq p_x \tag{5}$$

em que ${}_b q_x^{(1)}$ no numerador e ${}_a q_x^{(1)}$ no denominador representam as taxas dependentes a serem usadas na construção da tábua dependente (r) nas partes "b" e "a" dos anos de seguros ou de vida e ${}_b m_x^{(r)}$ no numerador e ${}_a m_x^{(r)}$ no denominador representam as taxas centrais de decrementos relativas às partes "b" e "a" desses anos, r variando de 1 a n e, Σ representa a soma das combinações 2 a 2, 3 a 3, etc., entre n decrementos, conforme haja dois, três, etc. fatores inseridos sob o sigma. No meu estudo anterior apresentado ao I.B.A. apresentei a fórmula (5) para dois e três decrementos sob a forma mais complicada do que as que se obtem de (5) dando a n os valores 2 e 3. Como mostro mais adianta a expressão (5) permite resolver as equações que resultam de (4) para qualquer número de decrementos, especialmente:

para dois decrementos:

$$q_x = \sum \bar{q}_x^{(1)} - \bar{q}_x^{(1)} \cdot \bar{q}_x^{(2)} \text{ em que } \sum \bar{q}_x^{(1)} = \bar{q}_x^{(1)} + \bar{q}_x^{(2)}$$

para três decrementos:

$$q_x = \sum \bar{q}_x^{(1)} - \sum \bar{q}_x^{(1)} \bar{q}_x^{(2)} + \bar{q}_x^{(1)} \bar{q}_x^{(2)} \bar{q}_x^{(3)} \text{ em que } \sum \bar{q}^{(1)} = \bar{q}_x^{(1)} + \bar{q}_x^{(2)} + \bar{q}_x^{(3)}$$

e $\Sigma \bar{q}_x^{(1)} \bar{q}_x^{(2)}$ é a soma das combinações dois a dois de três decrementos ou $\bar{q}_x^{(1)} \bar{q}_x^{(2)} + \bar{q}_x^{(1)} \bar{q}_x^{(3)} + \bar{q}_x^{(2)} \bar{q}_x^{(3)}$.

No parágrafo 12 da brochura citada a solução da equação para dois decrementos foi dada, porém, não a de três decrementos. Mostrarei adiante que as soluções dessas equações podem ser obtidas de (5) para qualquer número de decrementos para sugerir então que se substitua a expressão (5) por outra que permita construir táboas de decrementos múltiplos dependentes e independentes de modo simples. Deu a seguir um esbôço da exposição do parágrafo 12 da brochura para depois expôr meus pensamentos a êsse respeito.

A notação usada pelos autores é diferente da usada neste estudo, as taxas dependentes são representadas por aq_x em vez de q_x e aq_x^α, aq_x^β . aq_x^γ em vez de $q_x^{(1)}$, $q_x^{(2)}$ e $q_x^{(3)}$ e as taxas independentes são representadas por q_x^α, q_x^β, q_x^γ em vez de $\bar{q}_x^{(1)}$, $\bar{q}_x^{(2)}$, $\bar{q}_x^{(3)}$. A fim de evitar confusão usei neste estudo a minha notação, pois os autores usam a letra "a" para diferençar as taxas dependentes das independentes ao passo que eu adoto a letra "a" para designar a incidência da ocorrência na parte "*a*" dos anos de seguro ou de vida.

Os autores da brochura, nesse parágrafo, mostraram como achar as equações a serem resolvidas para dois e três decrementos por meio do teorema do valor médio e da suposição duma distribuição uniforme sôbre os anos de vida ou de seguro e mais, pelo teorema que reza que se $f(x)$ e $\varphi(x)$ são funções contínuas no intervalo $a \leq x \leq b$ e $\varphi(x) \geq 0$, tem-se:

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = f(\epsilon) \int_a^b \varphi(x)\, dx$$

sendo $a \leq \epsilon \leq b$

As seguintes relações entre as taxas dependentes e independentes para dois decrementos foram assim achadas.

$$q_x^{(1)} = \bar{q}_x^{(1)} \left(1 - \frac{1}{2} \bar{q}_x^{(2)}\right) \text{ e } q_x^{(2)} = \bar{q}_x^{(2)} \left(1 - \frac{1}{2} \bar{q}_x^{(1)}\right)$$

que satisfaz o teorema de Karup, visto que pela adição destas duas expressões achamos:

$$q_x = q_x^{(1)} + q_x^{(2)} = \sum \bar{q}_x^{(1)} - \sum q_x^{(1)} \bar{q}_x^{(2)}$$

como indicado acima; e para três decrementos:

$$q_x^{(1)} = \bar{q}_x^{(1)} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\bar{q}_x^{(2)} + \bar{q}_x^{(3)}\right) + \frac{1}{3} \bar{q}_x^{(2)} \bar{q}_x^{(3)}\right]$$

que também satisfaz o teorema de Karup visto que pela adição das expressões correspondentes de

$$q_x^{(2)} \text{ e } q_x^{(3)}$$

achamos:

$$q_x = \sum \bar{q}_x^{(1)} - \sum \bar{q}_x^{(1)} \bar{q}_x^{(2)} + \bar{q}_x^{(1)} \cdot \bar{q}_x^{(2)} \cdot \bar{q}_x^{(3)}$$

como indicado acima. Essa expressão pode também ser achada da seguinte integral

$$q_x^{(1)} = \bar{q}_x^{(1)} \int_0^1 \left(1 - tq_x^{(2)}\right) \left(1 - tq_x^{(3)}\right) dt$$

onde se pode ver que a mesma foi obtida de suposição duma distribuição uniforme dos decrementos sôbre os anos de seguro ou de vida. Os autores da brochura acharam também as seguintes relações do acima mencionado teorema do valor médio

$$q_x^{(1)} = \int_0^1 {}_tp_x\, \mu_{x+t}^{(1)}\, dt$$

$$q_x^{(1)} = \int_1^0 \frac{{}_tp_x}{{}_tp_x^{(1)}}\, {}_tp_x^{(1)}\, \mu_{x+t}^{(1)}\, dt$$

$$q_x^{(1)} = \frac{\sum p_x}{\sum p_x^{(1)}} \int_0^1 {}_tp_x^{(1)} \mu_{x+t}^{(1)} \, dt \qquad o \leq \sum < 1$$

$$q_x^{(1)} = \frac{\sum p_x}{\sum p_x^{(1)}} \bar{q}_x^{(1)} = \bar{q}_x^{(1)} \, \Sigma(Rp)_x$$

supondo que

$$\Sigma(Rp)_x = 1 - \frac{1}{2} (q_x - q_x^{(1)})$$

então

$$\bar{q}_x^{(1)} = \frac{q_x^{(1)}}{1 - \frac{1}{2} (q_x - q_x^{(1)})}$$

A respeito dessa fórmula os autores escrevem:

"Esta fórmula é dada no capítulo 21 do "Life Contigencies" (Spurgeon). Por substituição, se pode facilmente mostrar que a fórmula não é consistente com a fórmula (9.1)" (Esta fórmula corresponde a fórmula de Karup (4). Para duas fórmulas de decremento, escrevem os autores, pomos"

$$q_x^{(1)} = \frac{\bar{q}_x^{(1)}}{1 - c\, q_x^{(2)}} , \quad q_x^{(2)} = \frac{\bar{q}_x^{(2)}}{1 - c\, q_x^{(1)}} \tag{5a}$$

"então para satisfazer (9.1) temos:

$$q_x^{(1)} + q_x^{(2)} = \frac{q_x^{(1)}}{1 - c\, q_x^{(2)}} + \frac{q_x^{(2)}}{1 - c\, q_x^{(1)}} - \frac{q_x^{(1)}}{1 - c\, q_x^{(2)}} \cdot \frac{q_x^{(2)}}{1 - c\, q_x^{(1)}}$$

"que se reduz a $c^2 q_x - 2c + 1 = 0$ em que $q_x = q_x^{(1)} + q_x^{(2)}$ resolvendo-as temos" para $c < 1$:

$$c = \frac{1 - \sqrt{1 - q}}{q} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} q + \dots$$

"envolvendo potencias maiores de q_x"

A fórmula *(5a)* achada pelos autores da brochura é, como se vê, um caso particular de

$$\bar{q}_x^{(r)} = \frac{q_x^{(r)}}{1 - ({}_aq_x - {}_aq_x^{(r)})}$$

dado acima em que a ${}_aq_x = c\, q_x$ e ${}_aq_x^{(r)} = c\, {}_aq_x^{(r)}$

Na citada brochura não consta a equação em C a ser resolvida para 3 decrementos e o processo usado na mesma para 2 decrementos não foi adotado para 3 decrementos. Se o dito processo tivesse sido empregado ter-se-ia achado uma equação em C em função das taxas dependentes mais difícil a resolver do que uma equação em C expressa em função das taxas centrais. Isso se pode ver escrevendo na expressão (5) $(1 - c)\, q_x^{(1)}$ em lugar de ${}_aq_x^{(1)}$ e $cq_x^{(1)}$ no lugar de ${}_aq_x^{(1)}$ e procedendo do mesmo modo para as taxas centrais. Após essas substituições a expressão (5) se escreve:

$$(1 - c)^2 \sum q_x^{(1)} m_x^2 - (1 - c)^3 \sum q_x^{(1)} m_x^{(2)} m_x^{(3)} + \dots =$$

$$= p_x \left[c^2 \sum q_x^{(1)} m_x^{(2)} + c^3 q_x^{(1)} m_x^{(2)} m_x^{(3)} + \dots \right] \tag{6}$$

que para dois decrementos pode ser escrita:

$$(q_x c^2 - 2c + 1)\, m_x^{(1)} m_x^{(2)} = 0$$

e para três decrementos:

$$(q_x c^2 - 2c + 1) \sum m_x^{(1)} m_x^{(2)} + (q_x c^3 - 3c^2 + 3c - 1)\, m_1^{(1)} m_x^{(2)} m_x^{(3)} = 0 \tag{8}$$

As equações em C para quatro e mais decrementos podem ser escritas por inspeção da expressão (6).

A solução da equação (7) em C dada acima, para 2 decrementos, pode ser expressa em função da taxa central substituindo $\frac{m_x}{1 + cm_x}$ por q_x em $c^2 q_x - 2c + 1 = 0$ do que resulta

$$c^2 m_x + c\, (2 - m_x) - 1 = 0$$

A solução da equação (7) é mais convergente quando expressa em função de m_x do que quando expressa em função de q_x. Num caso:

$$\frac{1}{2} + \frac{m_x}{8} - \frac{m_x^3}{128} + \dots$$

e noutro caso

$$C = \frac{1}{2} + \frac{q_x}{8} + \frac{q_x^2}{16} + \dots$$

A conveniência de exprimir as relações entre as taxas dependentes e independentes em função das taxas centrais pode se ver no que segue. Para achar a expressão (8) de

$$q_x^{(1)} = \bar{q}_x^{(1)} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\bar{q}_x^{(2)} + \bar{q}_x^{(3)} \right) + \frac{1}{3} \bar{q}_x^{(2)} \bar{q}_x^{(3)} \right]$$

como achado acima pelos autores da brochura, da suposição duma distribuição uniforme dos três decrementos sôbre os anos de vida ou de seguro, é preciso escrever nesta expressão

$$\bar{q}_x^{(1)} = \frac{m_x^{(1)}}{1 + cm_x^{(1)}} \ ; \ \bar{q}_x^{(2)} = \frac{m_x^2}{1 + cm_x^{(2)}} \ ; \ \bar{q}_x^{(3)} = \frac{m_x^{(3)}}{1 + cm_{(x)}^3}$$

e proceder da mesma forma para as expressões correspondentes de $q_x^{(2)}$ e $q_x^{(3)}$, adicionando em seguida as expressões obtidas. A solução da equação (8) pode ser achada aplicando o método dos coeficientes indeterminados, escrevendo C como uma série infinita de m_x, os coeficientes das potências de m_x, sendo, no entanto, também expressos como uma série infinita das potências de

$$t = \frac{m_x^{(1)} m_x^{(2)} m_x^{(3)}}{\sum m_x^{(1)} m_x^{(2)}} \quad \text{de modo que temos}$$

$$C = r_0 + r_1 m_x + r_2 m_x^2 + \dots \quad \textit{ad inf. em que}$$

$$r_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} t - \frac{3}{128} t^3 - \frac{9}{1024} t^5 \dots \quad \textit{ad. inf.}$$

$$r_1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{128} t^2 + \frac{5}{1024} t^4 \dots \quad \textit{ad. inf.}$$

$$r_2 = \frac{1}{64} t + \frac{9}{128} t^2 - \frac{15}{1024} t^3 + \dots \quad \textit{ad. inf.}$$

Dessas expressões que nos deveriam dar as relações entre as taxas independentes e taxas dependentes pode-se ver:

1) que os cálculos a efetuar são laboriosos;

2) que os valores das taxas independentes para três decrementos são expressos em termos de m_x, isto é, de todos os três decrementos quando as três taxas independentes deveriam ser expressas em função de $m_x^{(1)}$, $m_x^{(2)}$ e $m_x^{(3)}$ respectivamente e as taxas dependentes em função de m_x;

3) que quando a população (das Caixas e Institutos) recenseada não fornecer dados estatísticos suficientes para achar as taxas dependentes e independentes não se pode achar estas expressões recorrendo à estatística de outras fontes, como conviria.

Por êstes três motivos procurei outra solução que a dada pela expressão (5); a qual não encontrei nos estudos apresentados no sétimo Congresso Internacional dos Atuários de Amsterdam em 1912 sôbre a importância, aplicação e cálculo das probabilidades independentes. As relações entre as taxas dependente e independente foram aí também deduzidas da suposição da distribuição uniforme que é um caso particular do conceito de distriuição "a" e "b". No que segue estas relações foram deduzidas dêste conceito que subentende o uso de taxas centrais.

Essa solução foi obtida das seguintes relações entre as taxas centrais e as taxas independentes aplicáveis também às taxas dependentes.

$$m_x^{(r)} = \frac{\Theta_x^{(r)}}{e_{\underline{x|}}} = \frac{\int_{t=0}^{1} e_{x+t}\, \mu_{x+t}^{(1)}\, dt}{\int_0^1 e_{x+t}\, dt} \neq colog_e\, \bar{p}_x^{(r)} = colog_e\, (1 - \bar{q}_x^{(r)})$$

em que

$$colog\, (1 - \bar{q}_x^{(r)}) = colog_e \left(1 - \frac{\Theta_x^{(r)}}{e_{\underline{x|}} + a\Theta_x^{(r)}} \right) = colog_e \left(1 - \frac{m_x^{(r)}}{1 + {}_a m_x^{(r)}} \right) \quad (9)$$

pondo ${}_am_x^{(r)} = K_r\, m_x^{(r)}$ em (9) pode-se escreve-la como segue

$$m_x^{(r)} = \int_{t=0}^{1} \mu_{x+t}^{(r)} dt = colog_e\, \overline{p}_x^{(r)} = colog_e (1 - q_x) = colog_e \left(1 - \frac{m_x^{(r)}}{1 + K_r\, m_x^{(r)}} \right) \quad (10)$$

para os n valores de r. A relação entre as taxas expressas pelo teorema de Karup

$$\overline{p}_x^{(1)}\ \overline{p}_x^{(2)} \ldots \overline{p}_x^{(r)} \ldots \overline{p}_x^{(n)} = p_x$$

pode ser escrita do modo seguinte:

$$e^{-m_x^{(r)}} \ldots e^{-m_x^{(r)}} \ldots e^{-m_x^{(n)}} = \overline{e}$$

em que $\overline{p}_x^{(r)}$ é achado do último membro a direita da expressão (10) exprimindo K_r como uma série infinita

$$a + b\, m_x^{(r)} + c\, (m_x^{(r)})^2 + \ldots$$

Os valores dos coeficientes a, b, c etc. são achados pelo método dos coeficientes indeterminados desenvolvendo

$$e^{-m_x^{(r)}} \quad e \quad 1 - \frac{m_x^{(r)}}{1 + K_r\, m_x^{(r)}}$$

em termos das potências de $m_x^{(r)}$ e resolvendo as equações sucessivas formadas dos coeficientes de iguais potências de $m_x^{(r)}$. Assim procedendo achamos:

$$K_r = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} m_x^{(r)} - \frac{1}{720} (m_x^{(r)})^3 + \frac{1}{30240} (m_x^{(r)})^5 - $$

$$- \frac{1}{1207600} (m_x^{(r)})^7 + \ldots$$

Os coeficientes a, b, c, etc... das potências pares de $m_x^{(r)}$ desaparecem e os das potências impares são alternadamente positivos e negativos convergindo ràpidamente para zero. Desta expressão de K_r pode se inferir que K_r varia entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} m_x^{(r)}$.

Deduz-se a expressão de K do mesmo modo de

$$m_x = colog \left(1 - \frac{m_x}{1 + k\, m_x} \right)$$

como o foi feito para K_r. Na expressão (9) escrevi

$$m_x^{(r)} = \frac{\theta_x^{(r)}}{e_{\underline{x|}}} = \frac{\int_{t=o}^{1} e_{x+t}\, \mu_{x+t}^{(r)}\, dt}{\int_{t=o}^{1} l_{x+t}\, dt} \neq colog_e\, p_x^{(r)} \quad (11)$$

enquanto em (10) escrevi $\int_{t=o}^{1} \mu_{x+t}^{(r)}\, dt = colog_e\, p_x^{(r)}$ visto que integrando $\mu_{x+t}^{(r)} = -\frac{d}{dt} log_e\, l_{x+t}^{(r)}$ dentro dos limites $t = 0$ a $t = 1$ achamos:

$$m_x^{(r)} = \int_{t=o}^{1} \mu_{x+t}^{(r)}\, dt = - log_e\, l_{x+1}^{(r)} - log_e\, l_x^{(r)} = colog_e\, \overline{p}_x^{(r)}$$

A expressão (11) representa as taxas centrais não ajustadas enquanto a expressão (12) representa as taxas centrais graduadas ajustadas a achar dos dados estatísticos representados por (11). Os existentes $e_{\underline{x|}}$ não são necessariamente distribuidos uniformemente sôbre os anos observados, o contrário, é o que se vê frequentemente nas Companhias de seguros de vida onde os novos negócios se acumulam no fim dos anos financeiros. A influência da variação dos pesos, isto é, de variação da distribuição dos existentes sôbre os anos observados sôbre os valores de $m_x^{(r)}$ em (11) é tanto mais apreciável quanto maiores forem os valores de $\mu_{x+t}^{(r)}$ e menores os existentes $e_{\underline{x|}}$ como ocorre especialmente com a mortalidade nas idades elevadas. A influência dessas variações sôbre esses valores de $m_x^{(r)}$ é, porém menos sensível quando forem menores os valores de $\mu_{x+t}^{(r)}$ e maiores os existentes $e_{\underline{x|}}$. Sem fazer esta distinção não me parece justo a afirmação de que variações apreciáveis nos pesos causam uma pequena variação na taxa central como afirmam os autores da brochura. A influência dessas variações far-se-á sentir muito menos sôbre as taxas dependentes e independentes do que sôbre as taxas centrais. Essa influência pode-se verificar de exemplos numéricos como pelo seguinte raciocínio aplicado aos expostos ao risco das taxas $q_x^{(r)}$ e $\overline{q}_x^{(r)}$ dados nas fórmulas (1) e (2), isto é, $e_{\underline{x|}} + {}_a\Theta_x$ e $e_{\underline{x|}} + {}_a\Theta_x^{(r)}$, respectivamente em que os acontecimentos (r) que não ocorrerem na parte "a" dos anos em curso devem ocorrer na parte "b" e estão, por conseguinte, incluidos em $e_{\underline{x|}}$ o que faz com que qualquer dessas variações não possam influir sôbre as taxas $\overline{q}_x^{(r)}$ e $q_x^{(r)}$ e possam, porém, sôbre as taxas centrais $m_x^{-(r)}$. A mesma observação se aplica ao número das saídas e entradas dos $n - 1$ acontecimentos diferentes de (r) na taxa $\overline{q}_x^{(r)}$ o que se pode ver de (10) substituindo nessa expressão

$$\frac{m_x^{(r)}}{1 + \left(K_r^1 + \frac{t}{\Theta_x^{(r)}}\right) m_x^{(r)}}$$

no lugar de $$\frac{m_x^{(r)}}{1 + K_r\, m_x^{(r)}}$$ em que

$$t = {}_a\Theta_x - {}_a\Theta_x^{(r)} - f(\Theta_x - \Theta_x^{(r)})$$

. Esta substituição não afeta (10), K_r diferindo de K_r' apenas nos seus termos independentes sendo que em K_r êsse têrmo é $\frac{1}{2}$ e em K_r' êsse têrmo é $\frac{1}{2} - \frac{t}{\Theta_x^{(r)}}$ de modo que se pode escrever

$$\frac{m_x^{(r)}}{1 + K_r\, m_x^{(r)}} = \frac{m_x^{(r)}}{1 + \left(K_r' + \frac{t}{\Theta_x^{(r)}}\right) m_x^{(r)}}$$

Aliás, isso resulta do fato que (10) é uma identidade quando os pesos são distribuidos uniformemente sôbre os anos observados, como mostrei acima para os valores ajustados. Quando se trata duma outra distribuição, como é geralmente o caso para os dados estatísticos não ajustados, a expressão (10) não é aplicável, embora os valores dos coeficientes de K e K_r, isto é, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$, $-\frac{1}{720}$ sejam independentes das referidas variações da distribuição dos pesos, por terem sido achados, como indicado acima, pelo método dos coeficientes indeterminados. Por conseguinte, as mesmas relações entre as taxas centrais e as taxas dependentes e independentes

aplicam-se quer estas sejam ajustadas ou não. Destas considerações pode-se inferir que convem achar os valores ajustados das taxas centrais, das taxas dependentes e independentes não ajustadas, em vez das taxas centrais não ajustadas, sendo estas taxas dependentes e independentes calculadas pelas fórmulas

$$q_x = \frac{m_x}{1 + K\, m_x} \quad \text{e} \quad \overline{q}_x^{(r)} = \frac{m_x^{(r)}}{1 + K_r\, m_x^{(r)}}$$

em vez de

$$q_x = \frac{m_x}{1 + {}_am_x} \quad \text{e} \quad \overline{q}_x^{(r)} = \frac{m_x^{(r)}}{1 + {}_am_x^{(r)}}$$

O conceito da distribuição "a" e "b" foi, por conseguinte, usado aqui para deduzir as relações acima mencionadas. Os dados estatísticos coligidos de modo a levar em conta a incidência de ocorrência dos acontecimentos nas duas partes "a" e "b" servem mais para estudá-los a luz da teoria da probabilidade a fim de decidir pontos de vista contestáveis que podem ser esclarecidos por êsses dados.

A relação entre as tábuas expressa pelo teorema da Karup aplica-se também aos acontecimentos que são incrementares, uma vez que esta relação ainda subsiste quando um ou mais dos acontecimentos são incrementares. O sinal deve ser então alterado de positivo a negativo para os termos correspondentes a êstes incrementos. Isto acontecerá, por exemplo, em uma tábua com três acontecimentos, um decremento por morte de ativo, um decremento para os entrados em invalidez e um incremento para os inválidos que retornam a atividade.

RESUMO E CONCLUSÃO

No primeiro estudo sôbre as fórmulas dos expostos ao risco *apresentado a esta Assembléia* mostrei como o conceito da distribuição "a" e "b" tornou possível simbolizar as fórmulas dos expostos ao risco achadas pelo método de censo e de seguros ou de fichas individuais. Neste estudo eu tenho substituido nessas fórmulas de decremento e incremento múltiplos as seguintes notações às desse conceito:

$$(1 - c)\, q_x^{(1)},\ (1 - c)\, m_x^{(r)},\ c q_x^{(1)},\ c\, m_x^{(r)}$$

no lugar de

$$ {}_{b}q_x^{(1)},\ {}_{b}m_x^{(r)},\ {}_{a}q_x^{(1)},\ {}_{a}m_x^{(r)}. $$

respectivamente como se pode ver das fórmulas (5) e (6). As equações em C (7) e (8) para dois e três decrementos foram assim achadas, r variando de 1 a 3, cujas soluções determinam as relações entre as taxas independentes e dependentes que satisfazem o teorema de Karup. Comparando estas expressões (7) e (8) com as (2) e (3) dadas no meu estudo anterior no parágrafo "Incremento e Decremento Múltiplos" pode se ver que sua forma não se presta, como as equações (7) e (8), para achar as soluções determinantes das mencionadas relações (falta um sinal positivo na fórmula (4). Uma simbologia racional tornou possível achar as soluções das equações (7) e (8) em C que representa uma série infinita. Outras equações em K e K_r foram sugeridas cujas soluções não tem os três inconvenientes das soluções das equações em C mencionados neste estudo. Embora o conceito da distribuição "a" e "b" tenha sido usado como um meio para revelar as relações entre as taxas independentes e dependentes que satisfazem o teorema de Karup, seria, porém, interessante ter *os números* dos *existentes* e *das ocorrências* dos n acontecimentos nas duas partes "a" e "b" dos anos em curso na data do censo. Esta separação implica, como mostrei neste estudo, a necessidade de achar, como se faz geralmente nos censos da população, taxas centrais que facilitam a construção de tábuas de decrementos e incrementos múltiplos que satisfazem o teorema de Karup. Por estas taxas centrais se vê que não há diferenças essenciais entre as fórmulas de expostos ao risco achados pelo método do censo e pelo método de seguro ou fichas individuais, contanto que estas taxas sejam expressas pelo conceito da distribuição "a" e "b" em vez duma suposição duma distribuição uniforme. Procedendo-se assim dá-se às taxas centrais nas observações sôbre os anos de seguro a importancia que elas tem nas observações sôbre os anos de vida nos censos da população. Estou disposto a pensar que foi devido ao conceito da distribuição "a" e "b" originado na Alemanha que se deve a representação das fórmulas dos expostos ao risco achados pelo método de censo da população por grafico conhecido como "gráfico Lexis" que se presta bem a representação das fórmulas dos expostos ao risco achadas pelo método de seguro ou fichas individuais. A ajuda dêste gráfico pode ser muito valiosa para alguns estudiosos das fórmulas dos expostos ao risco para esclarecer as suas dúvidas. A compreensão destas fórmulas não é fácil e minha experiência confirma o que Elderton e Fippard observaram na Inglaterra e escreveram na introdução do citado livro que principia como segue:

« É bem conhecido que as conclusões práticas atuariais são baseadas sôbre as tábuas de mortalidade, moléstia e outras, que são calculadas das estatístiticas obtidas dos censos ou das sociedades ou Companhias de seguros. O estudo dos métodos pelos quais estas tábuas são construidas é por isto de grande importância e se poderia pensar que o caráter fundamental da matéria torna-lo-ia atrativo, porém o fáto é que não há parte do trabalho atuarial que para o estudante médio é tão pouco interessante e tão aborrecedor. Isto pode ser devido a ter ouvido de muitas tábuas de mortalidade que não são usadas, algumas das quais nunca foram usadas e muitas das quais foram construídas por métodos mai s ou menos apropriados e êle assim é deixado com a impressão errônea que todo o assunto é uma massa de detalhes desconcertantes (a mass of bewildering detail).

Embora algumas destas observações não sejam aplicáveis aos estudiosos deste assunto no Brasil uma massa de detalhes só pode ser desconcertante se os dados não forem coligidos para a construção das tábuas de decremento e incremento múltiplos nos moldes constantes dos apendices A e B do meu estudo publicado neste Boletim para a construção das tábuas de mortalidade.

Espero que os estudiosos do assunto objeto dêste estudo me deixem aproveitar das suas críticas e observações.

RESUMO DA DISCUSSÃO

Ernest Ornstein. Não pretendo prender a atenção dos colegas por muito tempo, principalmente porque o Sr. Olifiers já teve de voltar para Petrópolis e não poderá, portanto, responder às objeções que ia fazer sôbre seu trabalho.

O que desejava dizer resume-se em quatro partes:

1.º Sugetões de ordem formal sôbre o título do trabalho: "Simbologia racional das fórmulas dos expostos ao risco".

Sôbre êsse assunto, o próprio autor já publicou trabalhos anteriores, como também a literatura técnica está cheia de trabalhos de outros autores sôbre o mesmo assunto. Creio que seria vantajoso se o próprio título desse uma indicação da especialização do que se trata no trabalho. Na realidade, o trabalho do Sr. Olifiers cuida da aplicação de simbologia das fórmulas dos expostos ao risco para tábuas de decremento múltiplo, de forma que desejava sugerir que o título do trabalho fosse: "Fórmulas dos expostos ao risco para tábuas de decremento múltiplo"; isso daria uma indicação imediata do assunto de que se ocupa o autor.

2.º O autor, no capítulo "Objeto do estudo", diz que vai provar a necessidade de substituir-se o conceito de distribuição uniforme na fórmula dos expostos ao risco, por um conceito de distribuição irregular que êle subdivide em duas parcelas, chamadas "antes" e "depois" do aniversário da apólice no respectivo exercício social. Estas duas distribuições foram designadas pelas letras b e a, que vêm do inglês *before* e *after*; isso porque o trabalho do autor foi primeiro publicado em inglês.

Sou de opinião de que não ficou provado o que o autor prometeu provar. O autor mostra como as fórmulas dos expostos ao risco deveriam ser modificadas, se fôsse adotado o critério de distribuição irregular, em lugar do de distribuição uniforme. São apresentadas várias fórmulas, naturalmente mais complicadas do que as obtidas pelo critério de distribuição uniforme.

A principal vantagem do conceito de distribuição uniforme é, justamente, a simplicidade das fórmulas e do seu uso prático. Já que o trabalho do Sr. Olifiers está restrito à parte algébrica, à dedução de fórmulas, não é possível demonstrar a necessidade da alteração desse critério, enquanto não houver um cálculo numérico que prove a importância do mesmo, através de resultados aritméticos. Sem isso não é possível mostrar sua necessidade. As investigações de mortalidade e seus problemas correlatos têm sempre uma finalidade prática, que é a de encontrar números que servem para cálculos atuariais relacionados com a mortalidade. Pode ser que os resultados numéricos, derivados do critério de distribuição irregular, difiram por muito pouco dos obtidos pela distribuição uniforme. Nada ficou esclarecido a respeito. Assim, enquanto não houver número, enquanto não houver uma demonstração numérica, não fica provada a afirmação do autor.

Acho que não se pode provar, somente pela álgebra, a necessidade ou a conveniência da introdução de novas fórmulas de finalidades práticas. Pelo contrário, poderia suceder que o resultado numérico pela fórmula nova fosse tão aproximado do conseguido pela fórmula antiga, que ficasse patente a desnecessidade, ou, até, a inconveniência da introdução da nova fórmula, mais complexa.

Creio que o autor não provou o que quis provar; apenas demonstrou quais seriam as consequências lógicas. Pessoalmente, sou de opinião que a distribuição uniforme é bastante exata para os cálculos de mortalidade, a não ser nos três primeiros anos de seguro das apólices novas, em que os movimentos de saídas e entradas atingem a percentagens relativamente elevadas, em comparação ao total de seguros vigentes.

De tôda maneira, seria interessante provar se é ou não necessária a introdução do conceito de distribuição b e a, parte essa que o autor omitiu em seu trabalho.

3.º O trabalho em apreço, como já disse, além de introduzir o conceito de distribuição irregular, mostra as diferenças que resultam na aplicação do método de censo, em logar do método de seguro, nas investigações de mortalidade. O autor mostra como se pode fazer o cálculo pelo método de censo e obter resultados com a mesma exatidão como pelo método de seguro. Para isso, êle introduz o conceito da distribuição irregular.

Agora, a dificuldade é a seguinte: para encontrar numéricamente a influência da distribuição irregular sôbre os resultados do método de censo, é necessário recorrer ao método de seguro, que o autor se propõe a abandonar. O método de seguro trabalha com fichas individuais, ao passo que o método do censo abandona-as e apenas faz censos periódicos, especialmente em 31 de dezembro de determinados anos. Ora, não é possível determinar a distribuição irregular "b" e "a", senão mediante fichas individuais. Chega-se, então, ao ponto de partida: é conveniente abandonar o método de seguro, porque êle é muito complicado; adota-se então o método do censo, mais simples; mas para fazê-lo mais exato é preciso recorrer ao método individual, que deve ser abandonado. Parece, portanto, que se cai num círculo vicioso, que não vejo como quebrar; mas quebrá-lo é necessário para poder fazer uso prático das conclusões algébricas do autor.

4.º O último ponto que eu quiz aduzir é uma objeção de ordem geral que não se refere propriamente ao tema do Sr. Olifiers. É o seguinte: o trabalho apresentado é na maior parte uma resposta a um artigo publicado em uma publicação inglêsa. Naturalmente, é difícil para os colegas do Brasil saberem o que foi apresentado naquelas publicações. Alías, essa própria publicação inglêsa por sua vêz, faz, referências a outras anteriores. Desse modo, o leitor que quiser apreciar um trabalho dessa natureza, fica desde logo desencorajado, porque, para seguir as idéias do autor, êle teria de estudar não somente o trabalho em causa, como outros anteriores.

Parece-me que isso não condiz bem como a finalidade da apresentação de trabalhos à Assembléia Técnica.

Sou de opinião que a Assembléia tem a finalidade de trazer aos colegas os benefícios do esfôrço mental e da experiência especializada de cada um de nós, sem a necessidade de repetir tal esfôrço. Por conseguinte, conviria que o autor de cada trabalho apresentasse, sob fórma condensada, os resultados de suas ponderações e pesquisas, de modo que não obrigue ao leitor a duplicar esse mesmo esfôrço, passo por passo. O autor teve de raciocinar, procurar, pensar, atravessar dificuldades, até chegar às suas conclusões. O leitor deve beneficiar-se do resultado das conclusões, sem ter que atravessar as mesmas dificuldades por que passou o autor.

Desejo sugerir, nesta Assembléia, que nos futuros trabalhos apresentados se evitasse, tanto quanto possível, a referência a outros trabalhos que nós aqui no Brasil, dificilmente poderemos ter a nosso alcance. Quando fôr necessário fazer referência a um trabalho publicado no estrangeiro, que se procure fazer uma pequena reprodução da parte que interessa; e, quando isso não for possível, por ser matéria por demais complexa, então procure-se dar uma condensação, a fim de evitar, que o leitor tenha que procurar, e estudar primeiro, tais trabalhos, antes de poder apreciar o trabalho novo.

É sòmente isto o que desejava dizer.

E. Olifiers. — O Sr. Ernesto Ornstein acha que o título de meu trabalho, "Uma Simbologia Racional das Fórmulas dos Expostos ao Risco", deveria ser outro, como por exemplo; "Fórmulas de Expostos ao Risco para Tábuas de Decremento Múltiplo". Usei o mesmo título que o do meu primeiro trabalho apresentado à Assembléia Técnica de 1945 para que se possa comparar o conteudo do capítulo "Decremento e Incremento Múltiplo" desse meu primeiro trabalho com o que ora está sendo debatido e certificar da eficiência duma simbologia racional. Desta comparação se pôde ver, com efeito, que não me ocorreu há quatro anos, quando apresentei à Assembléia Técnica o meu primeiro trabalho, substituir os símbolos $K_r m_x^{(r)}$ e Km_x por ${}_a m_x^{(r)}$ e ${}_a m_x$ respectivamente, para provar que se podem achar taxas dependentes e independentes das taxas centrais que satisfazem o teorema de Karup. Daí também se pode ver que pela substituição de $Cm_x^{(r)}$ e Cm_x *por* ${}_a m_x^{(r)}$ e ${}_a m_x$ respectivamente, é possível mostrar a conveniência de substituir o conceito supramencionado pela suposição de distribuição uniforme usada pelos autores Ingleses (Bailey e Haycocks) da brochura citada para achar as taxas dependentes e independentes que satisfazem o teorema de Karup.

Do item 2 da discussão, pode-se ver que na opinião do Sr. E. Ornstein, a minha tése não deveria ter sido tratada na Assembléia Técnica por ser meu trabalho uma crítica ou resposta a artigos publicados na Inglaterra em 1946 e serem minhas referências incompreensiveis para quem não tenha à mão os artigos publicados. Nenhuma menção é feita a incompreensibilidade dessas referências. Seria para mim um prazer saber quais são essas incompreensibilidades para satisfazer meu desejo de torná-las compreensiveis. Ao contrário do Sr. Ornstein penso que a profissão terá a ganhar no Brasil, pelo estudo como é feito em outros países, de publicações atuariáis estrangeiras com o fim de apresentar críticas construtivas às Assembléias Técnicas como eu fiz em discutir a brochura citada. As demais considerações desse item, podem até parecer um convite ao plagiato., à lei do menor esforço, ao comodismo.

No que se refere às observações do item 3, peço ao Sr. E. Ornstein atender a última frase do paragrafo; "Objeto dêste Estudo" que reza como segue; "Vou no que se segue referir-me a esta brochura para provar a necessidade de substituir a esta suposição, o conceito de distribuição "a" e "b" para achar as fórmulas usadas nessa construção". Pode-se, por conseguinte ver que nesta frase eu me refiro apenas a necessidade de substituição do conceito supramencionado em lugar de suposição da distribuição uniforme para achar as fórmulas.

O Sr. Ornstein é de opinião que, sem uma prova aritmética, não é possivel provar a aludida necessidade. Como apontei acima, o conceito já mencionado não implica a necessidade de dividir as estatísticas de decrementos e incrementos em duas partes dos anos de vida ou de seguros "a" ou "D" e "b" ou "A" como pensa o Sr. Ornstein. Para simplificar o cálculo das taxas dependentes e independentes e a construção de tábuas de decrementos, êsse conceito acima mencionado admite que essas taxas sejam calculadas pela referida suposição, porque por aquele conceito é possível determinar o gráu de aproximação dos cálculos efetuados. Como mencionei acima, quanto maior é a taxa central menor é o gráu de aproximação das taxas dependente e independente dessa taxa central.

No trabalho; "Mortalidade Entre Segurados Brasileiros" do Sr. Ornstein é interessante ler algumas de suas observações a respeito das investigações de mortalidade. "de todos os seus problemas correlatos que visam uma finalidade eminentemente prática. Querem apurar numeros que possam servir para cálculos práticos". E' precisamente por ter prática bem apreciavel das investigações, tais como as de mortalidade em diferentes paises que me foi possível sintetizar essa prática. O teste dêste conceito supramencionado será feito pela sua aplicação à construção das tábuas de decrementos e incrementos a que me referi no paragrafo "Objeto dêste Estudo".

Provavelmente o Sr. Ornstein pensa que estou também no terreno das especulações em considerar que as investigações de mortalidade são incompletas quando "visam uma finalidade eminentemente prática". Estas investigações devem ter uma finalidade mais humana que é a de pesquizar os elementos vitais das pessoas que pagam prêmios às Companhias de seguro de vida, as quais podem fornecer informações valiosas a êsse respeito. As taxas de mortalidade são apenas taxas dependentes das causas de morte. Com as taxas centráis, pelo teorema de Karup, é facil achar as taxas independentes para as causas de morte.

Diga-se, entre parentesis, que a êsse respeito o trabalho do Sr. Herbert J. Friemann, intitulado; "Hereditariedade, Mortalidade e Seguro de Vida" merece toda a atenção dos colegas de profissão.

No item 4 da discussão o Sr. Ornstein escreve; "O trabalho aponta as correções que deveriam ser introduzidas nas fórmulas do "método de censo", para equiparar seus resultados com os do "método de seguro" mas não indica como achar, praticamente, tais correções".

(Não há correções a introduzir visto que os dois métodos dão, pelo conceito supramencionado, valores iguais aos expostos ao risco), para escrever em seguida;

"A meu ver, sòmente será possivel determinar seus valores numéricos, usando-se fichas individuais de apólices expostas ao risco. Encontramo-nos, pois, num círculo vicioso".

Penso não me encontar em círculo vicioso algum, e estou à disposição do Sr. Ornstein para esclarecimentos.

Aproveito aqui o ensejo para agradecer a cooperação do nosso Diretor de Publicações, Carlos Leal Jourdan, pela revisão da redação dêste trabalho e providenciar melhor apresentação para o mesmo.

Departamento de Imprensa Nacional
Rio de Janeiro - Brasil - 1951